

מספר ת.ז. _____ מספר נבחן _____

הסתברות וסטטיסטיקה לדו-חוגי

סמסטר א' תשע"ג

כהן אסף

1. ענו על 15 השאלות הבאות.
2. משקל כל שאלה הוא 7 נקודות, סה"כ: 105 נקודות, הציון המקסימלי הוא 100.
3. אין להשתמש בספרים ו/או במחברות. ניתן להשתמש בשני דפי נוסחאות (דו-צדדיים) ובמחשבון.
4. לרשותכם 3 שעות.
5. יש לסמן את התשובות בטבלה הבאה בלבד. את הסימונים לכל שאלה יש לסמן בעמודה המתאימה. לכל שאלה יש לסמן רק תשובה אחת! ייבדקו רק הסימונים בטבלה. שאר טופס המבחן והמחברת משמשים כטיוטא בלבד ולא ייבדקו.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
א															
ב															
ג															
ד															

מספר תשובות נכונות: _____

ציון: _____

יהיו X_1, X_2, \dots סדרת מ"מ ברנולים ב"ת עם אותו פרמטר $p \in (0,1)$.

לכל $n \geq 1$ טבעי נגדיר את המ"מ הבא $S_n = \left\lfloor \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \right\rfloor$, כאשר הפונקציה $\lfloor x \rfloor$ היא פונקצית הערך השלם התחתון של x .

1. חשבו את הסיכוי הבא $P(S_n = 0)$:

- א. $1 - p^n$
- ב. $(1 - p)^n$
- ג. $(1 - p)^n p$
- ד. אף אחד מהנ"ל.

2. כיצד מתפלג S_n ?

- א. היפרגאומטרית.
- ב. גיאומטרית.
- ג. בינומית.
- ד. אף אחד מהנ"ל.

3. לכל $m \geq n \geq 1$ חשבו $\rho(S_n, S_m)$:

- א. $\sqrt{\frac{p^m}{1 - p^m} \cdot \frac{1 - p^n}{p^n}}$
- ב. $\frac{1}{p^n(1 - p^m)}$
- ג. $\frac{p^m}{(1 - p)^m} \cdot \frac{(1 - p)^n}{p^n}$
- ד. אף אחת מהנ"ל.

4. לכל $n \geq 1$ חשבו $Cov(S_n, X_n)$:

- א. $1 - p^n$
- ב. $p^n(1 - p)$
- ג. $p^{n-1} - p^n$
- ד. אף אחת מהנ"ל.

5. כיצד מתפלג $1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n$?

- א. בינומית.
- ב. גאומטרית.
- ג. בינומית שלילית שאינה גאומטרית.
- ד. אף אחת מהנ"ל.

מחלקים n כדורים הממוספרים $1, \dots, n$ ל- n תאים הממוספרים אף הם במספרים $1, \dots, n$.

6. חשבו את הסיכוי שיש לפחות תא אחד ריק:

א. $n \left(\frac{n-1}{n} \right)^n$.

ב. $\left(\frac{n-1}{n} \right)^n$.

ג. $\frac{\binom{n}{2} (n-1)!}{n^n}$.

ד. אף אחת מהנ"ל.

7. חשבו את הסיכוי שיש בדיוק תא אחד ריק:

א. $n \left(\frac{n-1}{n} \right)^n$.

ב. $\frac{\binom{n}{2} (n-1)!}{n^n}$.

ג. $\frac{\binom{n}{2} n!}{n^n}$.

ד. אף אחת מהנ"ל.

8. מה תוחלת מספר הכדורים שנפללו לתא עם ספרה גדולה יותר מזו שרשומה עליו?

א. $\frac{n-1}{2}$.

ב. $\frac{n-2}{2}$.

ג. $\frac{n}{2}$.

ד. אף אחת מהנ"ל.

9. יהיו A, B מאורעות המקיימים $P(A) = 0.8$, $P(B|A) = 0.5$, מה מהבאים בהכרח מתקיים?

א. $A \cap B$, $A \cap B^c$ ב"ת.

ב. $P(A) > P(B)$.

ג. $P(B) \geq \frac{P(A)}{2}$.

ד. אף אחת מהנ"ל.

10. יהיו $X \sim G(p)$, $Y \sim Bin(n, p)$ כלשהם, כאשר $p \in (0, 1)$, $n > 1$ כלשהם, מה מהבאים בהכרח מתקיים?

א. $E(X) < E(Y)$ אבל "ב" לא בהכרח מתקיים.

ב. $P(Y > X) = 1$.

ג. $\rho(X, Y) < 1$.

ד. אף אחת מהנ"ל.

יהי (X, Y) מ"מ דו-ממדי בעל הצפיפות המשותפת

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} (c+6)e^{-cx} & x > y > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

11. חשבו את הפרמטר c :

א. 3.

ב. 6.

ג. 9.

ד. אף אחת מהנ"ל.

12. מה מהבאים בהכרח מתקיים?

א. לכל $x > 0$ המ"מ $Y|X=x$ הוא בעל התפלגות מעריכית שתלויה ב x .

ב. לכל $x > 0$ המ"מ $Y|X=x$ הוא בעל התפלגות אחידה שאינה תלויה ב x .

ג. לכל $x > 0$ המ"מ $Y|X=x$ הוא בעל התפלגות אחידה שתלויה ב x .

ד. אף אחת מהנ"ל.

13. חשבו $E\left(\frac{Y}{X}\right)$:

א. ∞ .

ב. $\frac{1}{3}$.

ג. 3.

ד. אף אחת מהנ"ל.

יהיו $X, Y \sim U(0,1)$ מ"מ ב"ת בעלי התפלגות אחידה (רציפה) בקטע $(0,1)$. נגדיר $Z = |X - Y|$.

14. מהי הצפיפות של Z , $f_Z(t)$?

$$f_Z(t) = \begin{cases} 2(1-t) & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$f_Z(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{(1-t)^2}{2} & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$f_Z(t) = \begin{cases} 2t - t^2 & 0 < t < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

ד. אף אחת מהנ"ל.

15. חשבו את $V(|X - Y|)$:

$$\frac{91}{18} \quad \text{א.}$$

$$\frac{1}{18} \quad \text{ב.}$$

$$\frac{91}{720} \quad \text{ג.}$$

ד. אף אחת מהנ"ל.