

**סמסטר ב', מועד ב', תשע"ג, 31.7.2013**

**בחינה ב"מבוא להסתברות" (המרצה: דר' רון פלד)**

משך הבחינה שלוש שעות.

מותר להשתמש בדף סיכום כתוב (דו-צדדי) ובמחשבון ללא יכולות תכנות, ציור גרפים או תקשורת.

השאלון מורכב משאלה פתוחה ומשאלות רבות ברירה.

יש לסמן את התשובות לשאלות רבות הברירה בטופס המצורף בלבד!

תשובה שגויה לשאלה רבת ברירה אינה מפחיתה ניקוד.

מותר לסמן לכל היותר תשובה אחת לכל שאלה רבת ברירה.

סה"כ ישנן 110 נקודות במבחן. אם צברת  $S$  נקודות, ציונך  $\min(S, 100)$ .

בהצלחה!!!

## חלק א' – שאלה פתוחה – 26 נקודות

בכיתה ח ילדים. כל זוג ילדים הם חברים בסיכוי  $p$  ואינם חברים בסיכוי  $1-p$  באופן בלתי תלוי בין זוגות הילדים. נסמן ב- $X$  את כמות הילדים בכיתה שאין להם חברים. דוגמא: אם  $n=5$  והילדים בכיתה הם אורלי, בני, גדי, דוד והגר. יתכן וזוגות החברים הם (אורלי, בני), (אורלי, הגר) ו-(בני, גדי). במקרה זה  $X=1$  כי רק לדוד אין חברים.

א) (6 נק') הוכח כי  $E(X) = n(1-p)^{n-1}$ .

ב) (8 נק') הוכח כי

$$Var(X) = n(1-p)^{n-1} + n(n-1)(1-p)^{2n-3} - n^2(1-p)^{2n-2}$$

בשני הסעיפים הבאים נתון כי  $n=10$  ו- $p=0.25$ .

ג) (6 נק') הוכח כי  $P(X>0) \leq 0.76$ .

ד) (6 נק') הוכח כי  $P(X>0) \geq 0.39$ .

## חלק ב' – שאלות רבות ברירה – 7 נקודות לשאלה (סה"כ 84 נקודות)

### סוגיה ראשונה

בחנות פריטים מסוג A ומסוג B. מספר האנשים שנכנסים לחנות מתפלג פואסונית עם פרמטר  $\lambda$ . כל איש שנכנס לחנות קונה את פריט A בסיכוי  $p$  ואת פריט B בסיכוי  $q$ , באופן ב"ת בין הפריטים ובין האנשים השונים. דוגמא: שמעון לא קנה כלום, ששון קנה רק את פריט B ושרון קנתה גם את A וגם את B. נסמן ב- $X$  את מספר האנשים שקנו פריט מסוג A וב- $Y$  את מספר האנשים שקנו פריט מסוג B.

1. כיצד מתפלג  $X$ ?

א.  $Poisson(\lambda(1-p))$ .

ב.  $Poisson(\lambda p(1-p))$ .

ג.  $Poisson(\lambda p)$ .

ד. אף אחת מהנ"ל.

2. מהי תוחלת כמות הפריטים שנקנו בסך הכל?

א.  $\lambda(1-p)(1-q)$ .

ב.  $\lambda(p-pq+q)$ .

ג.  $\lambda(p+q)$ .

ד. אף אחת מהנ"ל.

3. כיצד מתפלג כמות הפריטים שנקנו בסך הכל?

א.  $Poisson(\lambda(1-p)(1-q))$ .

ב.  $Poisson(\lambda(p-pq+q))$ .

ג.  $Poisson(\lambda(p+q))$ .

ד. אף אחת מהנ"ל.

4. מה הסיכוי שכל איש שנכנס לחנות קנה לפחות פריט אחד?

א.  $e^{-\lambda(1-p)(1-q)}$ .

ב.  $(1 - e^{-\lambda p})(1 - e^{-\lambda q})$ .

ג.  $1 - e^{-\lambda(p-pq+q)}$ .

ד. אף אחת מהנ"ל.

### סוגיה שנייה

בכד  $m$  כדורים לבנים ו- $n$  שחורים. דוגמים באופן מקרי את  $m+n$  הכדורים מן הכד בזה אחר זה בלי החזרות.

יהי  $X_1$  מספר הכדורים הלבנים שנדגמו לפני הוצאת הכדור השחור הראשון.

יהי  $X_i$ , עבור  $1 \leq i \leq 2$ , מספר הכדורים הלבנים שנדגמו בין הוצאת הכדור השחור ה- $(i-1)$  לבין הוצאת הכדור השחור ה- $i$ .

יהי  $X_{n+1}$  מספר הכדורים הלבנים שנדגמו לאחר הוצאת הכדור השחור האחרון.

דוגמא: אם  $m=2$ ,  $n=3$  וסדר דגימת הכדורים הוא לבן, שחור, שחור, לבן, שחור אז  $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 0$ ,  $X_3 = 1$ ,  $X_4 = 0$ .

5. יהיו  $k_1, k_2, \dots, k_{n+1}$  מספרים שלמים אי-שליליים שסכומם  $m$ .

מהי ההסתברות  $P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_{n+1} = k_{n+1})$ ?

א.  $\frac{m!n!}{(m+n)!}$ .

ב.  $\frac{k_1!k_2! \dots k_{n+1}!}{m!n!}$ .

ג.  $\frac{k_1!k_2! \dots k_{n+1}!}{(m+n)!}$ .

ד. אף אחת מהנ"ל.

6. המשתנים המקריים  $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$  הם:

- א. בלתי תלויים ושווי התפלגות.
- ב. בלתי מתואמים אך לא בלתי תלויים.
- ג. שווי התפלגות אך לא בלתי מתואמים.
- ד. אף אחת מהנ"ל.

7. מהי התוחלת  $E[X_1]$  ?

א.  $\frac{m}{n+1}$

ב.  $\frac{n}{m+1}$

ג.  $\frac{m}{n+m}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

8. יהי  $v = \text{Var}(X_1)$  ו-  $c = \text{Cov}(X_1, X_2)$ . היחס  $\frac{c}{v}$  שווה ל-

א.  $\frac{1}{n}$

ב.  $-\frac{1}{n}$

ג.  $-\frac{m+n}{nm}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

9. מקדם המתאם  $\rho(X_1, X_2)$  הוא:

א.  $\frac{1}{n}$

ב.  $-\frac{1}{n}$

ג.  $-\frac{m+n}{nm}$

ד. אף אחת מהנ"ל.

## שאלות שאינן חלק מסוגיה

10. משתנה מקרי  $X$  מקיים  $P(0 \leq X \leq 1) = 1$  ו-  $E[X] = 0.5$ . נסמן  $p = P(X > 0.25)$ . בתנאים אלו, מהו הערך המקסימלי האפשרי עבור  $p$  ומהו הערך המינימלי האפשרי?

א. הערך המקסימלי האפשרי הוא 1 והמינימלי האפשרי 0.

ב.  $p$  בהכרח שווה ל-0.75.

ג. הערך המקסימלי האפשרי הוא 1 והמינימלי האפשרי  $1/3$ .

ד. אף אחת מהנ"ל.

11. יהיו  $X$  ו- $Y$  משתנים מקריים המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. נתון כי  $X$  ו- $Y$

בלתי תלויים ובעלי שונות. האם בהכרח  $Var(XY) = Var(X) \cdot Var(Y)$ ?

א. כן, ללא תנאים נוספים.

ב. כן אם  $E[X] = E[Y] = 0$  אבל לא בהכרח ללא תנאים נוספים.

ג. יתכן ו- $XY$  אינו בעל שונות ולכן השוויון אינו מוגדר היטב.

ד. אף אחת מהנ"ל.

12. נתונים משתנים מקריים  $X$  ו- $Y$  המוגדרים על אותו מרחב הסתברות. נתון כי לכל

$x, y$  ממשיים מתקיים  $P(X = x, Y = y) \leq P(X = x)P(Y = y)$ . האם  $X$  ו- $Y$  ב"ת?

א. כן, ללא תנאים נוספים.

ב. כן אם  $X$  ו- $Y$  שווי-התפלגות אבל לא בהכרח ללא תנאים נוספים.

ג. כן אם גם ידוע ש-  $P(X \geq Y) = 1$  אבל לא בהכרח ללא תנאים נוספים.

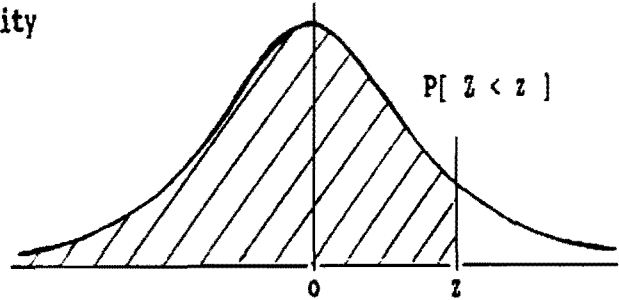
ד. אף אחת מהנ"ל.

## STANDARD STATISTICAL TABLES

### 1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value  $z$  i.e.

$$P[ Z < z ] = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2) dz$$



$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
$z$	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
$P$	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000