<u>פתרון הבחינה מ 28.2.03</u> (בחינה של פרופ' גילת ופרופ' מלכסון, מועד ב')

1. $cov(X_1, X_{51}) = E(X_1 \cdot X_{51}) - E(X_1) \cdot E(X_{51})$. אם למשל כל המספרים קטנים בערכם המוחלט מ $\frac{1}{200}$, אז כמובן ש $cov(X_1, X_{51})$ קטן בערכו המוחלט מכל הערכים המוחלטים של המספרים הרשומים ב א', ב', ג'.
בסעיפים הבאים נראה שהוא נקבע ע"י השונות.

2. $$\rho(X_1, X_{51}) = \frac{cov(X_1, X_{51})}{\sqrt{V(X_1) \cdot V(X_{51})}} \overset{\text{שוויון התפלגות}}{=} \frac{cov(X_1, X_{51})}{V(X_1)}$$
אם נדבר על צ'ימה של $X_1, X_2, \ldots, X_{101}$ אז:
$$0 = V\left(\sum_{i=1}^{101} X_i\right) = 101 \cdot V(X_1) + 101 \cdot 100 \cdot cov(X_1, X_{51})$$
$$\Longrightarrow cov(X_1, X_{51}) = -\frac{1}{100} \cdot V(X_1) \Longrightarrow \rho(X_1, X_{51}) = \frac{-1}{100}$$

3. $$V(V) = \frac{\sum V(X_i)}{51^2} = \frac{V(X_1)}{51}, \quad V(U) = \frac{\sum V(X_1) + \sum cov(X_i, X_j)}{51^2} =$$
$$= \frac{51 \cdot V(X_1) + 51 \cdot 50 \cdot \left(-\frac{1}{100}\right) \cdot V(X_1)}{51^2} = \frac{V(V)}{2}$$

4. $$P(X=5) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{98}{2}}{\binom{101}{4}} \cdot \frac{1}{97} = \frac{1}{101 \cdot 25 \cdot 11}$$

5. X הוא סכום של משתנים גיאומטריים שוני פרמטר: $E(X) = \frac{1}{\frac{3}{101}} + \frac{1}{\frac{2}{101}} + \frac{1}{\frac{1}{101}}$

---

6. $\rho(X, Y+Z) = \rho(X, N-X) = -1$ (כאשר הקשר הוא <u>לינארי</u> יורד אז המתאם הוא -1)

7. $$V(X) = N \cdot V(X_1) + \binom{N}{2} \cdot cov(X_1, X_2) = N \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{N-1}{N} +$$
$$+ 2 \cdot \binom{N}{2} \cdot \left(\frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N}\right) = 1$$

8. $$P(X \geq 1) \overset{\text{הכלה והפרדה}}{=} \binom{N}{1} \cdot \frac{1}{N} - \binom{N}{2} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} + \binom{N}{3} \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N-1} \cdot \frac{1}{N-2}$$
$\pm \cdots$
וכאשר $N \to \infty$ זה שואף ל $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots = 1 - \frac{1}{e}$

9. אם למשל $Y = n-1$ אז בהכרח $Z = 1$ לכן תלויים, אבל הם שווי התפלגות לפי שיקולי סימטריה.

10. לפי אינדיקטורים:
$$E(Y) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = 1$$
$$V(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{1}{6} \cdot 0^2 + \frac{1}{6} \cdot 2^2 + \frac{4}{6} \cdot 1^2 - 1^2 = \frac{1}{3}$$

---

11. לגבי כל כדור הסיכויים שווים (אם אין מידע על הקודמים)

$$p=E\left(\frac{X}{100}\right)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$$

12. כל כדור נותן אינפורמציה על מספר האדומים בקופסה ולכן כל תוצאה משפיעה על הסיכויים בהמשך, אלא אם כן ההתפלגות מנוונת ואז הסיכויים ידועים מראש.

13. $$E\left(\left(\frac{X}{100}\right)^2\right)=\frac{E^2(X)+V(X)}{10{,}000}=\frac{1}{16}+\frac{V(X)}{10{,}000}>\frac{1}{16}$$

14. $$\frac{E(X^2)}{100^2}-\frac{E(X(X-1))}{100\cdot 99}=E(X^2)\cdot\left(\frac{1}{100^2}-\frac{1}{100\cdot 99}\right)+\frac{25}{100\cdot 99}$$

$\Longrightarrow$ תלויה ב $E(X^2)$ שנקבע ע"י ההתפלגות

15. $$\frac{E(X^2)}{100^2}=\frac{V(X)+E^2(X)}{100^2}=\frac{625+625}{100^2}=\frac{1}{8}$$

---

16. התכונות $P(X=k)=p\cdot q^{k-1}$; $P(X>k)=q^k$ מיוחדת התפלגות גיאומטרית.

$$P(X=n+k\,|\,X>n)=\frac{p\cdot q^{n+k-1}}{q^n}=p\cdot q^{k-1}=P(X=k)$$

$\Longrightarrow$ התנאי מתקיים

בכוון השני: נניח ש $P(X=1)=p$.
נניח ש $P(X=t)=p\cdot q^{t-1}$ לכל $t\le n$ ונרצה להוכיח באינדוקציה ש $P(X=n+1)=p\cdot q^n$.
מכך ש $P(X=t)=p\cdot q^{t-1}$ לכל $t\le n$ נובע ש $P(X>n)=q^n$.

$$P(X=n+1)=P(X>n)\cdot P(X=n+1\,|\,X>n)=q^n\cdot P(X=1)=q^n\cdot p$$

17. מכיוון שההתפלגות לא מנוונת אז $0<p<1$, אפשר למשל לראות שהממוצע לא יכול לקבל את הערך 1 ולכן הוא לא בעל התכונה.

18. $X\sim G(p_1)$, $Y\sim G(p_2)$;

$$P(\min(X,Y)>k)\overset{\text{אי תלות}}{=\!=}P(X>k)\cdot P(Y>k)=q_1^k\cdot q_2^k=(q_1\cdot q_2)^k\Longrightarrow$$

למינימום יש התפלגות $G(1-q_1\cdot q_2)$

שלומי