

מסטר א' מועד א' תשע"א 26.8.2011

בחינה ב"מבוא להסתברות" (המרצה: ד"ר גלית אשכנזי-גולן)

משך הבחינה שלוש שעות

מותר להשתמש ב-3 דפי סיכומים כתובים או מודפסים (דו-צדדיים) ובמחשבון.

השאלון מורכב מ-18 שאלות. כל תשובה נכונה מזכה ב +6 נקודות וכל תשובה לא נכונה מזכה ב-2 נקודות. מותר לסמן יותר מתשובה אחת לשאלה. אם צברת S נקודות ציוןך $\min(S, 100)$.

יש לרשום את התשובות הסופיות לשאלות בטבלאות הבאות (מחברת הבחינה ושאר הדפים בטופס המבחן משמשים לטייטא בלבד ולא יבדקו)

בהצלחה!!

שאלה 5	שאלה 4	שאלה 3	שאלה 2	שאלה 1	
					א
X				X	ב
					ג
	X	X	X		ד

שאלה 10	שאלה 9	שאלה 8	שאלה 7	שאלה 6	
	X		X		א
					ב
		X		X	ג
X					ד

שאלה 13	שאלה 12	שאלה 11	
	X		א
			ב
X		X	ג
			ד

שאלה 18	שאלה 17	שאלה 16	שאלה 15	שאלה 14	
X					א
		X		X	ב
			X		ג
	X				ד

סוגיה ראשונה

מטילים ארבעה כדורים לארבעה תאים באקראי (כך שלכל 4^4 התוצאות האפשריות אותה הסתברות). התאים ממוספרים במספרים 1 עד 4.

יהי X_i מספר הכדורים בתא i .

תא $i, i=2,3,4$ נקרא "יפה" אם $X_i \geq X_1$. יהי N - מספר התאים היפים.

שאלה 1:

התפלגות המשתנה $W = X_1 + X_2$ שייכת למשפחת ההתפלגויות:

- א. היפרגיאומטריות
 ב. הבינומית
 ג. האחידות
 ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה
- Handwritten notes:* $W = X_1 + X_2$ הוא מספר הכדורים שנכנסו לתא 1 או לתא 2. $W \sim \text{Bin}(4, \frac{1}{2})$

שאלה 2:

ההתפלגות המותנה של N בהנתן $X_1 = 0$ היא:

- א. היפרגיאומטרית
 ב. בינומית
 ג. אחידה
 ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה
- Handwritten notes:* קפיתק $X_1 = 0$, N הוא מספר קבוצות שאינה של 3, קבוצת האחד קבוצת אלו משתנה אחיד.

שאלה 3:

כמה ערכים שונים מקבלת התוחלת המותנה: $E[N|X_1]$

- א. אחד
 ב. שניים
 ג. שלושה
 ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה
- Handwritten notes:* ככל שאיכו של X_1 עולה כך יורדת N . התוחלת המותנה של N על X_1 היא תלויה ערכים שונים אפשריים של $E(N|X_1)$.

שאלה 4:

חשבו $P(X_1 = 1 | N = 1) = ??$

$$P(X_1 = 1 | N = 1) = \frac{P(X_1 = 1 \cap N = 1)}{P(N = 1)}$$

$$= \frac{P(\text{כדור אחד קיבל 1})}{P(N = 1)} = \frac{\binom{4}{1} \binom{3}{1} / 4^4}{P(X_1 = 1 \cap N = 1) + P(X_1 = 2 \cap N = 1)}$$

$$= \frac{\binom{4}{1} \binom{3}{1} / 4^4}{\frac{\binom{4}{1} \binom{3}{1}}{4^4} + \frac{\binom{4}{2} \binom{2}{1}}{4^4}}$$

א. 1/9
 ב. 9/16
 ג. 3/64
 ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה

שאלה 5:

מקדם המתאם $\rho(N, X_1)$ הוא:

- א. גדול מאפס וקטן מאחד
- ב. קטן מאפס וגדול ממינוס אחד
- ג. שווה לאפס
- ד. לא ניתן לדעת מהנתונים שיש בידינו על השאלה

האו הסדר לשאלה 3
(יש קשר שלילי אך לא עילאי)

סוגיה שניה

מכוניות נכנסות לצומת מצפון לפי תהליך פואסון בקצב $\lambda=3$ בשעה.

משם כל מכונית, באופן בלתי תלוי באחרות, פונה מזרחה בסיכוי שלישי או מערבה בסיכוי שני שלישים.

יהי W מספר המכוניות הנכנס מצפון בשעה 08:00 עד 09:00 יהי X מספר המכוניות הפונה מזרח באותה השעה, ויהי Y מספר המכוניות הפונות מערבה באותה השעה

שאלה 6:

מקדם המתאם $\rho(X, Y)$ בין הוא:

- א. גדול מאפס וקטן מאחד
- ב. קטן מאפס וגדול ממינוס אחד
- ג. שווה לאפס
- ד. לא ניתן לדעת מהנתונים שיש בידינו על השאלה

באסונים מבוזלים הם ק"ת וזכר
אם קלת ממשלמים

שאלה 7:

חשבו $V(Y|X=5) = ?$

כאמז $X-1$ הם ק"ת וזכר
 $V(Y|X=5) = V(Y) = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$

- א. 2
- ב. 2/3
- ג. 3
- ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה

שאלה 8:

אם ידוע כי בשעה 08:00 עד 09:00 נכנסו בדיוק 5 מכוניות לצומת, ידוע כי בדיוק שתיים מתוכן פנו מזרחה, וכי במחצית השעה 08:00 - 08:30 נכנסו בדיוק שלוש מכוניות מצפון לצומת, אזי מספר המכוניות מתוך אלו שנכנסו במחצית השעה הראשונה שפנו מערבה מתפלג:

- א. בינומית
 ב. פואסוני
 ג. היפרגיאומטרי
 ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה
- מתק אלוכלוסיה קאנס 5 יבוא כי
 י"ע "מ'אז'ים", בלמ'ם כאקסו 3 לשלום
 כמה "מ'אז'ים" י'ע ד'ל'ם.
 עכ ה'פרגיאומטרי.

שאלה 9:

יהי מספר המכוניות הנכנסות לצומת במשך 4 שעות. מה נכון לומר בנוגע לקביעה הבאה:
 $W \sim P(12)$ $P(W > 20) = 3/8$

- א. לפי אי-שוויון צ'בישב זה לא ייתכן
 ב. לפי אי שוויון מרקוב זה לא ייתכן
 ג. לפי שני אי-השוויונים זה ייתכן בהחלט
 ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה
- לפי אי-שוויון צ'בישב זה לא ייתכן
 לפי אי שוויון מרקוב זה לא ייתכן
 לפי שני אי-השוויונים זה ייתכן בהחלט
 אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה

שאלה 10:
 לפי משפט הגבול המרכזי הקירוב להסתברות שמספר המכוניות הנכנסות בצפון במשך 48 שעות יהיה בין 130 ל-150 הוא (עגלו למקום השלישי אחרי הנקודה):

א. 0.180
 ב. 0.543
 ג. 0.812
 ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה

לפי משפט הגבול המרכזי הקירוב להסתברות שמספר המכוניות הנכנסות בצפון במשך 48 שעות יהיה בין 130 ל-150 הוא (עגלו למקום השלישי אחרי הנקודה):

א. 0.180
 ב. 0.543
 ג. 0.812
 ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה

א. מספר המכוניות הנכנסות מצפון
 $K \sim P(48.3)$
 $\phi\left(\frac{150-144}{\sqrt{44}}\right) - \phi\left(\frac{130-144}{\sqrt{44}}\right) = \phi(0.5) - \phi(-1.1667) = 0.6915 - (1 - 0.8779)$

סוגיה שלישית

לפנינו שלוש קוביות סימטריות (בכל אחת ההסתברויות לכל אחת מהתוצאות שווה):

- קוביה מספר 1, ולה שש פאות הממוספרות 1 עד 6
- קוביה מספר 2 ולה שמונה פאות הממוספרות 1 עד 8
- קוביה מספר 3 ולה 10 פאות הממוספרות 1 עד 10

קוביה נבחרת באקראי ומוטלת שוב ושוב 10 פעמים.

יהי X - מספר הקוביה שנבחרה, Y - מספר הפעמים שהתקבל "1" בעשר ההטלות, ו-Z - מספר הפעמים שיצאה תוצאה זוגית בעשר ההטלות.

אם יצא Y (גודל המצבים) של $Z|Y \sim B(Y, \frac{1}{2})$

שאלה 15:

מהי התפלגות $Z|Y$

- א. אחידה
- ב. היפרגיאומטרית
- ג. בינומית
- ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה

שאלה 16:

מהי התפלגות $Z|X, Y$

- א. אחידה
- ב. היפרגיאומטרית
- ג. בינומית
- ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה

אם יצא גודל המצבים ומספר הפאזות
 "אובסרו" של מספר הפאזות המצבים
 מתבטל (פרימטלית). (פרימטלים הם $X, Y, 100$)

שאלה 17:

קראים מספר מתבטל אחיז, Y , בין 0 ל-100.
 מהו הכסוי ש"פ"ו דצ'וק של ככולים שזורים
 חשבו $P(Z=2|X=2)$, דייקו עד המקום השלישי אחרי הנקודה

$$\sum_{k=0}^{100} \frac{1}{101} \cdot \frac{\binom{2}{2} \binom{98}{k-2}}{\binom{100}{k}} = \frac{1}{101} \sum_{k=2}^{100} \frac{98!}{(k-2)! \cdot (100-k)!} =$$

- א. 0.564
- ב. 0.343
- ג. 0.847
- ד. אף אחת מהתשובות האחרות אינה נכונה

שאלה 18:

מה הנכון:

$$= \frac{1}{101} \sum_{k=2}^{100} k(k-1) = \frac{1}{101 \cdot 100 \cdot 99} \left[\sum_{k=2}^{100} k^2 - \sum_{k=2}^{100} k \right] =$$

$$= \frac{1}{101 \cdot 100 \cdot 99} \left[\frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - \frac{100 \cdot 101}{2} - 1 + 1 \right]$$

$$= \dots = \frac{1}{3}$$

- א. $V(X+Z) > V(X) + V(Z)$
- ב. $V(X+Z) = V(X) + V(Z)$
- ג. $V(X+Z) < V(X) + V(Z)$
- ד. לא ניתן לדעת לפי הנתונים שבשאלה

$Cov(Z, X) > 0$
 $V(X+Z) = V(X) + V(Z) + 2 \cdot Cov(X, Z)$
 $V(X+Z) > V(X) + V(Z)$

pd