

סמסטר ב', מועד א', תשע"ב, 25.6.2012

בחינה ב"מבוא להסתברות" (המרצה: דר' רון פלד)

משך הבחינה שלוש שעות.

מותר להשתמש בדף סיכום כתוב (דו-צדדי) ובמחשבון ללא יכולות תכנות, ציור גרפים או תקשורת.

השאלון מורכב משאלה פתוחה ומשאלות רבות ברירה.

יש לסמן את התשובות לשאלות רבות ברירה בטופס המצורף בלבד!

תשובה שגויה לשאלה רבת ברירה אינה מפחיתה ניקוד.

מותר לסמן לכל היותר תשובה אחת לכל שאלה רבת ברירה.

סה"כ ישנן 110 נקודות במבחן. אם צברת S נקודות, ציוןך $\min(S, 100)$.

בהצלחה!!!

חלק א' – שאלה פתוחה – 26 נקודות

יהי $(S_k)_{0 \leq k \leq n}$ הילוך מקרי פשוט. כלומר, הילוך הנבחר בסיכוי שווה מבין המסלולים $\{(s_0, s_1, \dots, s_n) : s_0 = 0, |s_{k+1} - s_k| = 1, 0 \leq k \leq n-1\}$.

- א. (5 נק') חשב את $E(S_n^2)$.
- ב. (7 נק') השתמש במשפט הגבול המרכזי כדי לחשב את הגבול של $P(S_n^2 \leq n)$ כאשר n שואף לאינסוף (רשום תשובתך בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה).
- ג. (7 נק') הוכח כי $E(S_n^4) = n(3n-2)$.
- ד. (7 נק') השתמש באי-שוויון צ'בישב החד-צדדי כדי להוכיח כי $P(S_n^2 \geq n/2) \geq 1/9$ לכל $n \geq 1$.

חלק ב' – שאלות רבות ברירה – 7 נקודות לשאלה (סה"כ 84 נקודות)

סוגיה ראשונה

גברת עדינה הולכת בכל בוקר לעבודה. בכדי לשמור על כושר היא נוהגת לשים בכיסה הימני בכל בוקר 100 פתקים. על 70 מהם רשום "לכי בניין אחד ימינה", על 20 מהם רשום "לכי שני בניינים שמאלה", ועל 10 מהם רשום "הישארי במקומך". בכל שלב היא שולפת פתק מכיסה הימני (שנבחר באופן אחיד מבין הפתקים ששם), מבצעת מה שכתוב עליו ומעבירה אותו לכיסה השמאלי.

נגדיר את המשתנים המקריים הבאים עבור $1 \leq n \leq 100$:

R_n - מספר הפתקים מסוג "לכי בניין אחד ימינה" שהוציאה עד שלב n (כולל). במלים אחרות, זהו מספר הפתקים מסוג "לכי בניין אחד ימינה" שיש בכיסה השמאלי לאחר שלב n .

L_n - מספר הפתקים מסוג "לכי שני בניינים שמאלה" שהוציאה עד שלב n (כולל). במלים אחרות, מספר הפתקים מסוג "לכי שני בניינים שמאלה" שיש בכיסה השמאלי לאחר שלב n .

X_n - המיקום שלה ביחס למיקום ההתחלתי מיד לאחר שלב n . הליכה של בניין אחד ימינה מוסיפה אחד למיקום זה והליכה של בניין אחד שמאלה מפחיתה אחד ממיקום זה.

1. כיצד מתפלג מספר הפתקים מסוג "לכי שני בניינים שמאלה" שנשארו בכיס ימין מיד לאחר שלב n ?

- א. היפרגאומטרית
- ב. גאומטרית
- ג. בינומית
- ד. אף אחת מהנ"ל

2. כיצד מתפלג X_n ?

- א. היפרגאומטרית
- ב. גאומטרית
- ג. בינומית
- ד. אף אחת מהנ"ל

3. מהי $E[L_n | R_n]$?

- א. $\frac{2n - R_n}{3}$
- ב. $\frac{2L_n - R_n}{3}$

- ג. $\frac{2n-2R_n}{3}$
 ד. אף אחת מהנ"ל

4. מהי $E[X_n]$?

- א. $\frac{3n}{10}$
 ב. 0
 ג. $\frac{5n}{3}$
 ד. אף אחת מהנ"ל

5. מהי $Cov(R_n, L_n)$?

- א. $\frac{28n(100-n)}{9900}$
 ב. $\frac{14n(100-n)}{9900}$
 ג. $\frac{28n(100-n)}{9900}$
 ד. אף אחת מהנ"ל

6. מהי ההסתברות שמתיש הוא במהלך הליכתה תגיע גברת עדינה 70 בניינים ימינה ממיקומה ההתחלתי? (כלומר, שקיים n עבורו $X_n=70$)

- א. $\frac{1}{\binom{90}{20}}$
 ב. $\frac{1}{\binom{100}{30}}$
 ג. $\frac{\binom{80}{10}}{\binom{100}{70}\binom{30}{10}}$
 ד. אף אחת מהנ"ל

סוגיה שניה

למר עדין שלוש חולצות: אדומה, ירוקה ולבנה. כל בוקר הוא בוחר את אחת החולצות לעבודה, באופן בלתי תלוי, בסיכוי $1/2$ את האדומה, בסיכוי $1/3$ את הירוקה ובסיכוי $1/6$ את הלבנה.

7. מהי תוחלת כמות החולצות השונות שמר עדין לובש ב-6 ימים? (התשובה בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה)

- א. 2.31
 ב. 2.42

- ג. 2.50
- ד. 2.56

8. מה הסיכוי שכל שלוש החולצות נלבשו מתישהוא במהלך 6 ימים? (התשובה בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה)

- א. 0.47
- ב. 0.58
- ג. 0.66
- ד. 0.73

יום אחד החליט מר עדין שעליו לרוקן את ארון הבגדים. מאותו יום והלאה, בכל ערב הוא מחליט בסיכוי $1/5$ לזרוק את החולצה שלבש באותו היום (באופן בלתי תלוי בין הימים ובבחירת החולצה), ובכל בוקר הוא מגריל את החולצה שילבש באותו יום לפי ההתפלגות המותנה על החולצות הנותרות. לדוגמא, אם זרק את החולצה הירוקה ונותרו רק החולצות האדומות והלבנות, ילבש את האדומה בסיכוי $3/4$ ואת הלבנה בסיכוי $1/4$.

9. מהי התפלגות כמות הימים עד שמר עדין יישאר ללא חולצות?

- א. בינומית שלילית שאינה גיאומטרית
- ב. גיאומטרית
- ג. פואסונית
- ד. אף אחת מהנ"ל

10. מה הסיכוי שהחולצה האחרונה שתישאר בארון היא הלבנה? (התשובה בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה)

- א. 0.33
- ב. 0.58
- ג. 0.69
- ד. 0.83

11. מהי תוחלת כמות החולצות השונות שילבש מר עדין עד שתזרק אחת החולצות? (התשובה בדיוק של שתי ספרות אחרי הנקודה)

- א. 1.91
- ב. 2.05
- ג. 2.30
- ד. 2.44

שאלה שאינה חלק מסוגיה

12. יהיו המשתנים המקריים הבלתי תלויים $X, Y \sim P(\lambda)$ (כלומר, מתפלגים פואסונית עם פרמטר

למבדא שגדול מאפס). אילו מהטענות הבאות נכונה:

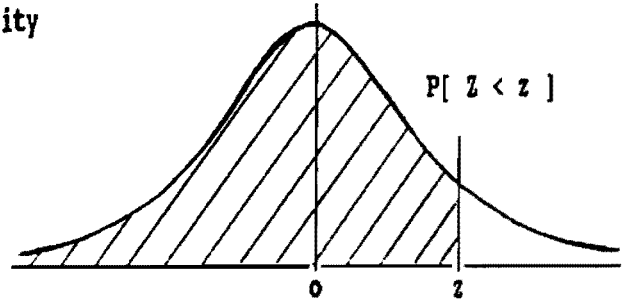
- א. $2X \sim P(2\lambda)$
- ב. $Y+1 \sim P(\lambda+1)$
- ג. $X-Y, X+Y$ בלתי תלויים
- ד. אף אחת מהנ"ל

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z i.e.

$$P[Z < z] = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}Z^2) dz$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
z	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
P	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000