

בחינה במבוא להסתברות

המורה: פרופ' בוריס צירלסון

משך הבחינה: 3 שעות.
 מותר להשתמש בדף סכום אישי, ובמחשב כיס.
 השאלון מורכב מ-20 שאלות. רצוי לענות על כולן.
 לכל שאלה ניתנות 3 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה.
 באם כל התשובות נראות לך לא נכונות סמן (ד).
 סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות
 זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה.
 הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

	X				X		X	X	X	X	X	X
		X				X			X			
			X			X			X			
				X								
0	-2	6	-2	-2	-4	4	0					

דוגמה:

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.
 לעזרתך מצורפת רשימת נוסחאות.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5		6	7	8	9	10	11	12
א													
ב													
ג													
ד													

	13	14	15	16	17	18	19		20
א									
ב									
ג									
ד									

סוגיה 1

יהי S_n מספר ההצלחות ב- n ניסויים בלתי תלויים, כל אחד בעל הסתברות p להצלחה, ויהי $0 < p < 1$, $q = 1 - p$. נסמן ב- A_n את המאורע " S_n הוא מספר זוגי".

1. התוחלת $\mathbb{E}((-1)^{S_n})$ שווה ל-

(א) $(-1)^{np}$ (ב) $(q-p)^n$ (ג) 0

רמז: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ לכל a, b , חיוביים או שליליים.

2. ההסתברות $\mathbb{P}(A_n)$ שווה ל-

(א) $1/2$

(ב) $\frac{1 + (q-p)^n}{2}$

(ג) $q^n + q^{n-2}p^2 + q^{n-4}p^4 + \dots$

רמז: התבוננו ב- $\frac{1 + (-1)^{S_n}}{2}$.

3. התוחלת $\mathbb{E}(S_n \cdot (-1)^{S_n})$ שווה ל-

(א) $-np(q-p)^{n-1}$

(ב) $np(-1)^n$

(ג) $np(p-q)^{n-1}$

רמז: הזכרו (י) בחישוב תוחלות להתפלגויות בינומיות ופואסון.

4. התוחלת המותנית $\mathbb{E}(S_n | A_n)$ שווה ל-

(א) $\frac{2np}{1 + (q-p)^n}$

(ב) np

(ג) $np \frac{1 - (q-p)^{n-1}}{1 + (q-p)^n}$

רמז: התבוננו ב- $\mathbb{E}\left(S_n \cdot \frac{1 + (-1)^{S_n}}{2}\right)$.

5. הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(S_n | A_n)}{\mathbb{E}(S_n)}$ הוא

(א) לא קיים

(ב) גדול מ-1

(ג) קטן מ-1

סוגיה 2

בוחרים באקראי 4 משבצות מתוך טבלה 4×4 . יהיו X_1, Y_1 הקואורדינטות של המשבצת הראשונה במדגם (מספר השורה ומספר העמודה, מ-1 עד ל-4), X_2, Y_2 הקואורדינטות של המשבצת השנייה, וכן הלאה. יהיו $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$ ו- $T = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$.

6. מאורעות $X_1 = 1$ ו- $X_2 = 1$ הם
(א) בלתי תלויים.

(ב) זרים.

(ג) אם המדגם עם החזרה אז בלתי תלויים, ואם המדגם ללא החזרה אז זרים.

7. מאורעות $S = 4$ ו- $T = 4$ הם
(א) בלתי תלויים.

(ב) זרים.

(ג) אם המדגם עם החזרה אז בלתי תלויים, ואם המדגם ללא החזרה אז זרים.

8. תוחלת מותנית $\mathbb{E}(T | S = s)$, האם היא תלויה ב- s ?
(א) כן.

(ב) לא.

(ג) אם המדגם עם החזרה אז לא, ואם המדגם ללא החזרה אז כן.

9. שונות מותנית $\mathbb{V}(T | S = s)$, האם היא תלויה ב- s ?
(א) כן.

(ב) לא.

(ג) אם המדגם עם החזרה אז לא, ואם המדגם ללא החזרה אז כן.

10. משתנים מקריים S, T הם
(א) תלויים.

(ב) בלתי תלויים.

(ג) אם המדגם עם החזרה אז בלתי תלויים, ואם המדגם ללא החזרה אז תלויים.

11. תוחלת $\mathbb{E}(S)$ היא

(א) שווה 10.

(ב) לא שווה 10.

- (ג) אם המדגם עם החזרה אז שווה 10 ,
 ואם המדגם ללא החזרה אז לא שווה 10 .

.....
 12. שונות $V(S)$ היא

- (א) שווה 5 .
 (ב) לא שווה 5 .
 (ג) אם המדגם עם החזרה אז שווה 5 ,
 ואם המדגם ללא החזרה אז לא שווה 5 .

סוגיה 3

מתוך עיר בחרו באקראי בתושב אחד ושאלו אותו n שאלות. יהי X מספר השאלות שהוא ענה נכון. יודעים מנתונים סטטיסטיים את התוחלת $E(X) = \mu$ ואת סטיית התקן

$$\sqrt{V(X)} = \sigma .$$

נניח שלכל תושב יש הסתברות אישית לענות נכון לשאלה (אותה הסתברות לכל שאלה), ובהנתן התושב תשובותיו לשאלות השונות הן בלתי תלויות זו מזו. נסמן ב- Y את ההסתברות האישית של התושב הנבחר.

13.
 (א) התפלגותו של X היא קיפול (קונבולוציה) של התפלגות בינומית והתפלגותו של Y .
 (ב) בעל התפלגות בינומית.
 (ג) התפלגות מותנית של X בהנתן $Y = y$ היא בינומית, אבל (א), (ב) לא נכונים (כללית).

14.
 (א) $E(X) = nE(Y)$, $V(X) = n(E(Y))(1 - E(Y))$.
 (ב) $E(X|Y) = nE(Y)$, $V(X|Y) = nE(Y(1 - Y))$.
 (ג) $E(X|Y) = nY$, $V(X|Y) = nY(1 - Y)$.

15. שווה ל-
 (א) $n(E(Y))(1 - E(Y))$.
 (ב) $nE(Y(1 - Y))$.
 (ג) $n^2V(Y) + nE(Y(1 - Y))$.

16.
 (א) $E(Y) = \frac{\mu}{n}$, אבל $V(Y)$ אינה נקבעת חד-ערכית באמצעות μ, σ .
 (ב) $E(Y) = \frac{\mu}{n}$, $V(Y) = \frac{\sigma^2}{n^2}$.

$$\mathbb{V}(Y) = \frac{\sigma^2}{n(n-1)} - \frac{\mu(n-\mu)}{n^2(n-1)}, \mathbb{E}(Y) = \frac{\mu}{n} \quad (\text{ג})$$

.....
 17. השוויון $\mathbb{V}(Y) = \frac{\sigma^2}{n^2}$ מתקיים:

(א) תמיד.

(ב) אם ורק אם Y מקבל ערך אחד בלבד.

(ג) אם ורק אם Y מקבל שני ערכים 0, 1 בלבד.

.....
 18. השוויון $\mathbb{V}(X) = n\mathbb{E}(Y(1-Y))$ מתקיים:

(א) תמיד.

(ב) אם ורק אם Y מקבל ערך אחד בלבד.

(ג) אם ורק אם Y מקבל שני ערכים 0, 1 בלבד.

.....
 19. השוויון $\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}X\right) = (\mathbb{E}(Y))(1 - \mathbb{E}(Y))$ מתקיים:

(א) תמיד.

(ב) אם ורק אם Y מקבל ערך אחד בלבד.

(ג) אם ורק אם Y מקבל שני ערכים 0, 1 בלבד.

20. יהיו X, Y משתנים מקריים בעלי התפלגויות בינומיות, $X \sim B(n_1, p_1)$,

$Y \sim B(n_2, p_2)$ ויהי $Z = X + Y$.

(א) אם X, Y בלתי תלויים ו- $n_1 = n_2 = n$ אז $Z \sim B(n, p_1 + p_2)$.

(ב) $\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{a}$ לכל $a > 0$.

(ג) אם $p_1 = p_2 = p$ אז $Z \sim B(n_1 + n_2, p)$.

רשימת נוסחאות

$\mathbb{V}(X)$	$\mathbb{E}(X)$	$\mathbb{P}(X = k)$	ההתפלגות	
$np(1-p)$	np	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$B(n, p)$	בינומית
$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{1-p}{p}$	$p(1-p)^k$	$G(p)$	גיאומטרית המתחילה ב-0
$\frac{n^2-1}{12}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{1}{n}$	$U(n)$	אחידה ב- $\{1, \dots, n\}$
$n \frac{1-p}{p^2}$	$n \frac{1-p}{p}$	$\binom{k+n-1}{n-1} p^n (1-p)^k$	$NB(n, p)$	בינומית-שלילית המתחילה ב-0
$n \frac{RW}{(R+W)^2} \left(1 - \frac{n-1}{R+W-1}\right)$	$n \frac{R}{R+W}$	$\frac{\binom{R}{k} \binom{W}{n-k}}{\binom{R+W}{n}}$	$H(n; R, W)$	היפרגיאומטרית

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad (-1 < x < 1)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X))$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{V}(Y|X)) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(Y|X))$$

$$\hat{Y} = \rho \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (X - \mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}(Y)$$