

מספר מחברת: _____

מספר ת.ו.: _____

בחינה בקורס מברא להסתברות
שנת תשע"ב, סמסטר א', מועד ב'
מרצה: אילון סולן

תאריך הבחינה: 23.3.2012.

מספר הקורס: 1102 – 0365.

זמן הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר מותר: מחשבון כיס, 4 (ארבעה) דפי נוסחאות.

השאלון מורכב מ-20 שאלות המבוססות על 2 סוגיות. רצוי לענות על כולן. לכל שאלה ניתנת 4 תשובות. סמן בטבלת התשובות את התשובה הנראית לך נכונה. סימון התשובה הנכונה במקום המתאים בטבלה שבתחתית עמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.

	X				X		X
		X				X	X
			X		X		X
				X		X	X

דוגמא:

.0 -2 6 -2 -2 -4 4 0

סה"כ הנקודות האפשרי הוא 120.

בהצלחה!!

	1	2	3
א			
ב			
ג			
ד			

	4	5	6	7	8	9	10	11
א								
ב								
ג								
ד								

	12	13	14	15	16	17	18	19	20
א									
ב									
ג									
ד									

שלוש שאלות שאינן קשורות לסוגייה

1. יהיו X ו- Y שני משתנים מקריים. נגדיר שני משתנים מקריים חדשים W ו- Z באופן הבא:
 $W := X - Y$ ו- $Z := X + Y$.

(א) W ו- Z בלתי מתואמים.

(ב) W ו- Z מתואמים אם ורק אם קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ שעבורם מתקיים $Y = aX + b$.

(ג) W ו- Z בלתי מתואמים אם ורק אם $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

2. עבור זוג משתנים מקריים X ו- Y , השוויון $E[XY] = E[Y E[X | Y]]$

(א) נכון תמיד.

(ב) נכון רק אם X ו- Y בלתי תלויים.

(ג) אינו נכון, שכן אגף שמאל הוא מספר ואגף ימין הוא משתנה מקרי.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

3. גודלו של מרחב ההסתברות הקטן ביותר שבו ניתן לדגדיר שלושה משתנים מקריים X, Y ו- Z בעלי התפלגות ברנולי עם פרמטר $\frac{1}{3}$ המקיימים ש- X ו- Y בלתי תלויים, הוא:

(א) 2.

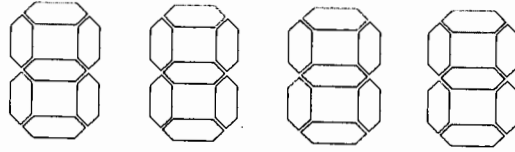
(ב) 4.

(ג) 27.

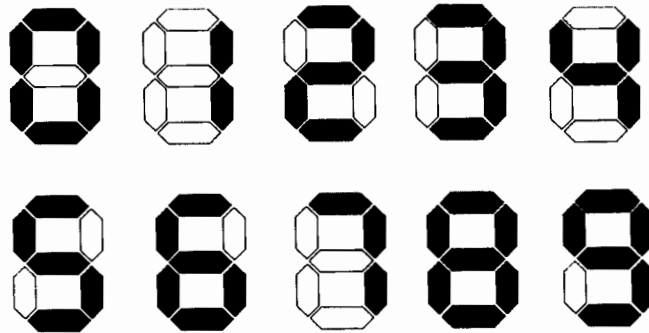
(ד) אף תשובה אינה נכונה.

סוגייה ראשונה

בלוח דיגיטלי ישנם 28 מקטעים המסודרים ב-4 קבוצות, כפי שמופיע בתרשים הבא:



במצב ההתחלתי כל 28 המקטעים כבויים. כפתור הנמצא ליד הלוח משנה את מצב המקטעים באופן מקרי: בכל פעם שהכפתור נלחץ, כל מקטע משנה את מצבו (ממצב כבוי למצב דלוק או ממצב דלוק למצב כבוי) בהסתברות $\frac{1}{2}$, ללא תלות בלחיצות הקודמות ובמקטעים האחרים. המקטעים הדולקים בקבוצה מסוימת עשויים ליצור ספרה. הספרות הן כדלקמן (בלבדו!)



כאשר מקטע שחור הוא מקטע דולק. אם נוצרות ספרות בכל ארבע הקבוצות, אז נוצר מספר 4-ספרתי.

4. ההסתברות שלאחר לחיצה אחת יופיע המספר 1234 היא:

(א) $\cdot \frac{1}{2^{28}}$

(ב) $\cdot \frac{1}{10^4}$

(ג) $\cdot \frac{1}{2^{18}}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

5. ההסתברות שאחרי לחיצה אחת יופיע מספר 4-ספרתי תקין היא:

(א) $\cdot \frac{10}{2^8}$

(ב) $\cdot \frac{10}{2^{18}}$

(ג) $\cdot \frac{10^4}{2^{28}}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

6. בהינתן שאחרי הלחיצה הראשונה ישנם 11 מקטעים דולקים, ההסתברות המותנית שהמספר שנוצר הוא 1174 היא:

(א) $\cdot \frac{1}{\binom{28}{11}}$

(ב) $\cdot \frac{1}{20}$

(ג) $\cdot \frac{1}{2^{28}}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

7. בהינתן שאחרי הלחיצה הראשונה מופיע מספר 4-ספרתי תקין המכיל בדיוק 11 מקטעים דולקים, ההסתברות המותנית שהמספר שנוצר הוא 1174 היא:

(א) $\cdot \frac{1}{11}$

(ב) $\cdot \frac{1}{24}$

(ג) $\cdot \frac{1}{2^{28}}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

8. בהינתן שאחרי הלחיצה הראשונה ישנם בדיוק 11 מקטעים דולקים, ההסתברות המותנית שבקבוצה הראשונה (מימין) מופיעה הספרה 1 היא:

(א) $\frac{\binom{7}{2} \binom{21}{9}}{\binom{28}{11}}$

(ב) $\frac{\binom{21}{9}}{2^{28}}$

(ג) $\frac{\binom{21}{9}}{\binom{28}{11}}$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

9. נסמן ב- N את מספר המקטעים הדולקים בקבוצה הראשונה (מימין). יהי M משתנה מקרי השווה 1 אם בקבוצה הראשונה (מימין) נוצרה ספרה 0 אחרת. התחלת $E[MN]$ שווה:

(א) $\frac{49}{10}$

(ב) $\frac{49}{128}$

(ג) 4

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

עבור $i = 1, 2, 3, 4$ נסמן ב- Y_i את המשתנה המקרי השווה 1 אם בקבוצה ה- i (מימין) מופיעה הספרה i , אחרת 0.

10. ההתפלגות של המשתנה המקרי $Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4$ לאחר הלחיצה החמישית היא:

(א) בינומית עם פרמטרים $n = 4$ ו- $p = \frac{1}{128}$.

(ב) ברנולי עם פרמטר $p = \frac{1}{10}$.

(ג) בינומית שלילית.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

11. ההתפלגות של המשתנה המקרי $Y_1 \cdot Y_2 + Y_3 \cdot Y_4$ לאחר הלחיצה החמישית היא:

(א) בינומית.

(ב) אחידה.

(ג) בינומית שלילית.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

סוגייה שנייה

אהרון, בנימין וגאולה משתתפים במבצע התרומה. כל אחד מהם מקבל מעטפה שבה רשומים שמות של תורמים פוטנציאליים שאליהם הוא מתקשר. כל תורם פוטנציאלי תורם 1 מליון ש"ח בהסתברות p ו-0 ש"ח בהסתברות $1-p$, באופן בלתי תלוי בזהות המתרים ובהתנהגות התורמים האחרים.

שימו לב: היחידות בשאלה זו הן מליוני שקלים.

מנהל מבצע ההתרמה הכין שלוש מעטפות, הראשונה מכילה 5 שמות של תורמים פוטנציאליים, השנייה מכילה 6 שמות של תורמים פוטנציאליים והשלישית מכילה 7 שמות של תורמים פוטנציאליים. שמו של שום תורם אינו מופיע ביותר ממעטפה אחת. המנהל מחלק את המעטפות לאהרון, בנימין וגאולה באקראי, לפי טבלת ההסתברויות הבאה:

אפשרות	הסתברות	אהרון	בנימין	גאולה
אפשרות א'	0.4	5 תורמים	6 תורמים	7 תורמים
אפשרות ב'	0.3	6 תורמים	7 תורמים	5 תורמים
אפשרות ג'	0.3	7 תורמים	5 תורמים	6 תורמים

נסמן ב- X את מספר התורמים שאיתם גאולה יצרה קשר, ב- Y את מספר התורמים שאיתם אהרון יצר קשר, ב- Z את מספר התורמים שאיתם בנימין יצר קשר, ב- W את סך התרומות שהתרומה גאולה (במליוני ש"ח) וב- W את סך כל התרומות שאספו השלושה (במליוני ש"ח).

12. ההתפלגות של המשתנה המקרי W היא:

(א) היפר-גיאומטרית.

(ב) בינומית.

(ג) אחידה.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

13. התוחלת של המשתנה המקרי X בהינתן ש- $T \geq 6$ היא:

(א) 6.1

(ב) $\frac{43}{7}$

(ג) זהו משתנה מקרי ששווה 7 בהסתברות $\frac{4}{7}$ ו-5 בהסתברות $\frac{3}{7}$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

14. מה היא ההסתברות המותנית שגאולה לא הצליחה להתרים דבר בהינתן שהיא יצרה קשר עם 6 תורמים.

(א) $(1-p)^6$.

(ב) 0

(ג) $0.3(1-p)^5 + 0.3(1-p)^6 + 0.4(1-p)^7$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

15. בהינתן שהסכום הכולל שאותו התרימה גאולה הוא 6 מיליון ש"ח, ההסתברות המותנית ש- $X = 6$ שווה:

(א) $\frac{3}{7}$.

(ב) $\frac{1}{8-7p}$.

(ג) $\frac{3}{31-28p}$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

16. בהינתן שהסכום הכולל שאותו התרימה גאולה הוא 6 מיליון ש"ח, התחלת המותנית של X שווה:

(א) $\frac{13}{2}$.

(ב) $\frac{55-49p}{8-7p}$.

(ג) $\frac{214-196p}{31-28p}$.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

17. השונות של Z , סך התרומות שהתרימה גאולה, שווה:

(א) $p(1-p)\mathbb{E}[X] + p^2\text{Var}(X)$

(ב) $p(1-p)\mathbb{E}[X]$

(ג) $p(1-p)\mathbb{E}[X] + p\text{Var}(X)$

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

18. השונות המשותפת $Cov(X, Y)$ שווה:

(א) -1.

(ב) -0.39.

(ג) -0.78.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

19. בניח $p = 0.2$. לפי הקירוב הנורמלי, מה הוא המספר המינימלי של תורמים שאליהם יש לפנות כדי שהסתברות להתרים לפחות 30 מליון ש"ח תהיה לפחות 0.9?

(א) 185.

(ב) 121.

(ג) 150.

(ד) אף תשובה אינה נכונה.

20. בניח $p = 0.2$. ההסתברות ש- W , סך התרומות של אהרון, בנימין וגאולה, יהיה לפחות 8.6 מקיימת:

(א) לפי אי-שוויון צ'בישב, $P(W \geq 8.6) \leq \frac{2.88}{(8.6)^2}$.

(ב) לפי אי-שוויון מרקוב, $P(W \geq 8.6) \leq \frac{3.6}{8.6}$.

(ג) לפי משפט הגבול המרכזי, הסתברות זו שווה בקירוב
 $P(W \geq 8.6) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty e^{-x^2/2} dx$, כאשר $z = \frac{5}{\sqrt{2.88}}$.

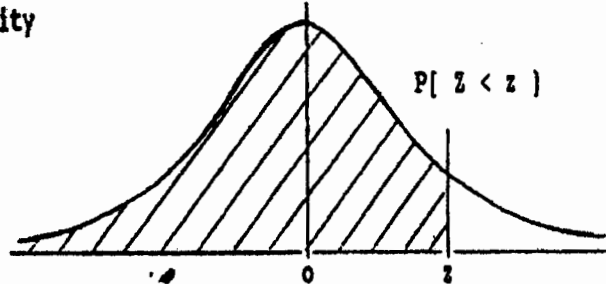
(ד) אף תשובה אינה נכונה.

STANDARD STATISTICAL TABLES

1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value z i.e.

$$P[Z < z] = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}z^2) dz$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000