

בתרון הבחינה של בראב ג'יטר ובראב מאכסון N 17.2.04

1. $N=3$ פני המעלים של המאליים שמתת אחוז המאונות לא אנו.
2. תוחלת סכום תמוז' אלה סכום התוחלות עק $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
3. עלות סכום אנו' אלה קבוצת סכום הפונות, שמרבה של סכום הפונות של המאונות, נוסף המרבה של סכום (cov-)
4. $V(N) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) + 2 \cdot \text{cov}(X_1, X_2) + 2 \cdot \text{cov}(X_1, X_3) + 2 \cdot \text{cov}(X_2, X_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + 2 \left(0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) + 2 \left(0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \right) + 2 \cdot \left(0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \right) = \frac{19}{100}$
5. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \right) + 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \right) = \frac{539}{1000}$
6. $P(N=0) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{10}$

שלוש האלמנטים 7, 8, 9 עוסקות בקצות 'צורות' של התפלגות בואסונית. אלו כאלו עם הפרדת שלפן.

7. $X \sim P(\alpha)$ אם $Y \sim P(\beta)$ אז $X+Y \sim P(\alpha+\beta)$

$$\begin{aligned}
 P(Z=m) &= \sum_{k=0}^m P(X=k, Y=m-k) = \sum_{k=0}^m P(X=k) \cdot P(Y=m-k) \\
 &= \sum_{k=0}^m e^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!} \cdot e^{-\beta} \frac{\beta^{m-k}}{(m-k)!} = \frac{1}{m!} \cdot e^{-(\alpha+\beta)} \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \alpha^k \beta^{m-k} \\
 &= \frac{e^{-(\alpha+\beta)}}{m!} \cdot (\alpha+\beta)^m
 \end{aligned}$$

$$\frac{P(X=h, Y=0)}{P(Z=h)} = \frac{\frac{1}{h!} \cdot e^{-\alpha} \cdot \alpha^h \cdot e^{-\beta}}{\frac{1}{h!} \cdot e^{-(\alpha+\beta)} \cdot (\alpha+\beta)^h} = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^h \quad \text{ז. 8}$$

$$\begin{aligned}
 P(X=k | Z=h) &= \frac{\frac{1}{k!} \cdot e^{-\alpha} \cdot \alpha^k \cdot \frac{1}{(h-k)!} \cdot e^{-\beta} \cdot \beta^{h-k}}{\frac{1}{h!} \cdot e^{-(\alpha+\beta)} \cdot (\alpha+\beta)^h} = \binom{h}{k} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^k \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} \right)^{h-k} \quad \text{ז. 9} \\
 &= \binom{h}{k} \cdot \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^k \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} \right)^{h-k}
 \end{aligned}$$

$$E\left(S_n - \frac{n}{2}\right)^4 = E\left(\sum (X_i - \frac{1}{2})\right)^4 \quad \text{§ 1.10}$$

$P(Y_i = \frac{1}{2}) = P(Y_i = -\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ משתנה ב"מ. $Y_i = X_i - \frac{1}{2}$ משתנה

$$E\left(\sum Y_i\right)^4 = \sum_{i=1}^n E(Y_i)^4 + \sum_{i \neq j} \binom{4}{3} E(Y_i^3 \cdot Y_j) +$$

$$+ \sum_{i \neq j} \binom{4}{2} E(Y_i^2 \cdot Y_j^2) + \sum_{i \neq j \neq k \neq i} \binom{4}{2} \binom{2}{1} E(Y_i^2 \cdot Y_j \cdot Y_k) =$$

$$= n \cdot \frac{1}{16} + 0 + \binom{n}{2} \cdot 6 \cdot \frac{1}{16} + 0 = \frac{3n^2 - 2n}{16}$$

$i \neq j$ משתנה ב"מ. $E(Y_i^3 \cdot Y_j) = E(Y_i^3) \cdot E(Y_j) = 0$ משתנה ב"מ. $E(Y_i^2 \cdot Y_j^2) = E(Y_i^2) \cdot E(Y_j^2) = \frac{1}{4}$ משתנה ב"מ. $E(Y_i^2 \cdot Y_j \cdot Y_k) = 0$ משתנה ב"מ.

אם נבטא את הממוצע של S_n כפונקציה של n נקבל:

$$E\left(X_1 - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 + \frac{1}{2} \cdot \left(0 - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \quad \text{עבור } h=1$$

$$E\left(S_2 - 1\right)^4 = \frac{1}{4} (2-1)^4 + \frac{1}{2} (1-1)^4 + \frac{1}{4} (0-1)^4 = \frac{1}{2} \quad \text{עבור } h=2$$

$$V(S_n) = 400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 100 \quad \text{§ 1.11}$$

$$P\left[\left|S_{400} - \frac{400}{2}\right| \geq 20\right] \leq \frac{100}{20^2} = \frac{1}{4} \implies$$

$$P\left[\left|S_{400} - \frac{400}{2}\right| < 20\right] \geq \frac{3}{4}$$

אם \geq ואלא $>$ כמ $>$ א. 1.2 א"כ נבטא את א' שיוון מרקב' עם הממוצע, שגה מיתר ב' חסרה

$$P\left[\left|S_{400} - \frac{n}{2}\right| \geq 20\right] \leq \frac{3 \cdot 400^2 - 2 \cdot 400}{20^4} = \frac{3 \cdot 400 - 2}{16 \cdot 400} < \frac{1}{4}$$

שלם

13. $\hat{\beta}$ א הסיאונ'ים צ'בי'כים אפ'י'חתי רק מק'ן פ'ל'ג'נים: $\frac{\binom{m}{k}}{\binom{m+n}{k}}$

14. א' מ'ר'ת'ה פ'ת'צ'ת'ה פ'וא' ס'צ'ור כ'ל'ם'. ק'מ'א'ר'ע פ'ת'ק'ו'ק'ס י'ס מ'ק'ו'מ'ו'ת נ'ת'ו'נ'ים א'ל'ק'ג'ים ו'מ'ק'ו'מ'ו'ת נ'ת'ו'נ'ים ל'ש'מ'ו'ר'ים א'כ'ן י'ס ו'ח'ו'ן. m ס'צ'ו'כ'ים.

15. $\hat{\beta}$ מ'ש'ק'ו'ל'י ס'מ'ט'ר'י'פ'ה פ'ת'ה ש'ו'ן פ'ת'נ'ב'ל'ג'ו'ת, א'כ'ן פ'ת'ה מ'ת'נ'א'ר'ים כ'י ל'ש'ל'ת כ'ל'ם e ו' x_1 ל'צ'ד ל'ש' x_2 ק'ט'ן ק'מ'ו'ר'ע.

16. $\hat{\beta}$ m פ'ת'צ'ו'כ'ים י'כ'נ'ס ל' $n+1$ מ'ת'ו'צ'ו'ת. מ'ש'ק'ו'ל'י ס'מ'ט'ר'י'פ'ה,

17. $\hat{\beta}$ ק'כ'ל מ'ת'ו'צ'ו'ת י'כ'נ'ס $\frac{m}{n+1}$ ק'מ'ו'ר'ע. $\text{Var} \sum X_i = (n+1) \cdot \text{Var}(X_1) + 2 \binom{n+1}{2} \cdot \text{cov}(X_1, X_2)$ $\hat{\beta}$

$\frac{0}{\frac{c}{V}} \implies \frac{c}{V} = \frac{-(n+1)}{2 \cdot \binom{n+1}{2}} = -\frac{1}{n}$

18. $\hat{\rho}(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1) \cdot V(X_2)}} = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{V(X_1)} = -\frac{1}{n}$

wide