

ת"ז התלמיד \_\_\_\_\_

מס' סידורי \_\_\_\_\_

סמסטר א' מועד א' תשס"ד  
תאריך הבחינה: 17.2.2004

**בחינה במבוא להסתברות**  
**המורים: פרופ' דוד גילת, פרופ' יצחק מלכסון**

- משך הבחינה: שלוש שעות
- מותר להשתמש בסיכום אישי בהיקף של עד 2 דפים ובמחשב כיס
- השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. ענה על כולן
- לכל שאלה ניתנות 4 תשובות שאחת ורק אחת מהן נכונה. סימון התשובה הנכונה (במקום המתאים בגוף השאלון ובטבלה שבתחתית עמוד זה) מזכה ב-6 נקודות. סימון תשובה לא נכונה נושא שתי נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה.
- הצובר  $N$  נקודות יקבל את הציון  $\min(100, \max(N, 0))$ .

**בהצלחה!**

סוגיה I

	1	2	3	4	5	6
א						
ב						
ג						
ד						

סוגיה II

	7	8	9
א			
ב			
ג			
ד			

סוגיה III

	10	11	12
א			
ב			
ג			
ד			

סוגיה IV

	13	14	15	16	17	18
א						
ב						
ג						
ד						

## סוגיה 1

נתונים שלושה מאורעות  $C, B, A$  בעלי הסתברויות  $1/2, 1/4, 1/5$  בהתאמה. יהי  $N$  המספר (המקרי) של המאורעות שהתרחשו מבין שלושת המאורעות הנתונים.

1. א. המאורע  $[N = 3]$  הוא המשלים של אחד המשלימים של שלושת המאורעות הנתונים.
- ב. המאורע  $[N = 1]$  הוא המשלים של אחד שלושת המאורעות הנתונים.
- ג. המאורע  $[N = 0]$  הוא אחד המשלימים של שלושת המאורעות הנתונים.
- ד. כל הטענות הנ"ל אינן נכונות.

$$E(N) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{19}{20} \quad \text{א. 2.}$$

$$E(N) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{40} \quad \text{ב.}$$

- ג. אי אפשר לחשב את  $E(N)$  ללא נתונים נוספים.
- ד. כל הטענות הנ"ל אינן נכונות.

$$Var(N) = \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{239}{400} \quad \text{א. 3.}$$

$$Var(N) = \frac{361}{400} \quad \text{ב.}$$

- ג. אי אפשר לחשב את השונות של  $N$  ללא נתונים נוספים.
- ד. כל הטענות הנ"ל אינן נכונות.

4. בהנחה שהמאורעות  $C, B, A$  זרים בזוגות:

$$\text{א. השונות של } N \text{ היא } \frac{19}{400}.$$

$$\text{ב. } Var(N) = 1$$

- ג. דרושים נתונים נוספים לחישוב השונות של  $N$ .
- ד. כל הטענות הנ"ל אינן נכונות.

5. בהנחה ש-  $A \subset B \subset C$ , השונות של  $N$  היא:

$$\text{א. } \frac{5}{4}$$

$$\text{ב. } \frac{539}{400}$$

- ג. דרושים נתונים נוספים לקביעת השונות.
- ד. כל הטענות הנ"ל אינן נכונות.

6. בהנחה ש-  $C, B, A$  בלתי תלויים (הדדית):

$$\text{א. } P[N = 2] = \frac{3}{10}$$

$$\text{ב. } P[N = 0] = \frac{3}{10}$$

- ג. דרושים נתונים נוספים לקביעת ההסתברויות הנ"ל.
- ד. כל הטענות הנ"ל אינן נכונות.

## סוגיה II

מכוניות מגיעות למגרש חניה דרך שתי כניסות א' ו-ב' באופן בלתי תלוי. ידוע שמספר המכוניות המגיעות דרך כניסה א' מפולג פואסוניית עם תוחלת (פרמטר)  $\alpha$  ומספר המכוניות המגיעות דרך כניסה ב' מפולג פואסוניית עם תוחלת  $\beta$ .

7. ההתפלגות של מספר המכוניות המגיעות למגרש החניה היא:
- פואסוניית עם (פרמטר)  $\alpha\beta$ .
  - לא פואסוניית.
  - פואסוניית עם (פרמטר)  $\alpha + \beta$ .
  - אף אחת מהנ"ל.
8. בהנתן כי הגיעו למגרש  $n$  מכוניות, ההסתברות (המותנה) שכל המכוניות נכנסו דרך כניסה א' היא:
- $1 - (\alpha / (\alpha + \beta))^n$ .
  - $(\beta / (\alpha + \beta))^n$ .
  - $(\alpha / (\alpha + \beta))^n$ .
  - אף אחת מהנ"ל.
9. ההתפלגות המותנה של מספר המכוניות שנכנסו דרך כניסה א', בהנתן שהגיעו  $n$  מכוניות למגרש, היא:
- בינומית עם פרמטרים  $n$  ו- $p = \alpha$ .
  - בינומית עם פרמטרים  $n$  ו- $p = \alpha / (\alpha + \beta)$ .
  - פואסוניית עם פרמטר  $\alpha$ .
  - היפרגיאומטרית.

### סוגיה III

יהי  $S_n$  מספר ה"הצלחות" ב-  $n$  נסיונות בלתי תלויים כאשר הסתברות ה"הצלחה" בכל ניסוי היא  $\frac{1}{2}$ .

10.  $E\left(S_n - \frac{n}{2}\right)^4$  היא:

א.  $\frac{n^4}{16}$

ב.  $\frac{n^2}{16}$

ג.  $\frac{n^4}{8}$

ד.  $\frac{3n^2 - 2n}{16}$

בשאלות 11 ו-12, שימו לב להבדל בין  $>$  ו-  $\geq$ .

11. יהי  $n = 400$ . בעזרת אי-שוויון צ'בישב נקבל:

א.  $P\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| < 20\right] > \frac{3}{4}$

ב.  $P\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geq 20\right] \leq \frac{1}{16}$

ג.  $P\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geq 20\right] \geq \frac{1}{4}$

ד. אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.

12. יהי  $n = 400$ . בעזרת המומנט המרכזי הרביעי (סעיף 10) ואי-שוויון מרקוב נקבל:

א.  $P\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| < 20\right] > \frac{3}{4}$

ב.  $P\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geq 20\right] \leq \frac{1}{16}$

ג.  $P\left[\left|S_n - \frac{n}{2}\right| \geq 20\right] \geq \frac{1}{4}$

ד. אף תשובה מהני"ל אינה נכונה.

סוגיה IV

בכד  $m$  כדורים לבנים ו- $n$  שחורים. דוגמים באופן מקרי את  $m+n$  הכדורים מן הכד בזה את זה, בלי החזרות.  
 יהי  $X_1$  מספר הכדורים הלבנים שנדגמו מן הכד לפני הכדור השחור הראשון,  $X_2$  - מספר הלבנים בין השחור הראשון לשני,  $\dots, X_{n+1}$  - מספר הלבנים אחרי השחור האחרון.

13. ההסתברות  $P(X_1 \geq k)$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) היא:

- א.  $\frac{k}{m}$ .
- ב.  $\frac{m-k}{m+n}$ .
- ג.  $\frac{\binom{n}{k}}{\binom{m+n}{k}}$ .
- ד.  $\frac{\binom{m}{k}}{\binom{m+n}{k}}$ .

14. ההסתברות  $P(X_1 = k_1, X_2 = k_2, \dots, X_{n+1} = k_{n+1})$  היא:

- א.  $\frac{m!n!}{(m+n)!}$ .
- ב.  $\frac{k_1!k_2!\dots k_{n+1}!}{m!n!}$ .
- ג.  $\frac{k_1!k_2!\dots k_{n+1}!}{(m+n)!}$ .
- ד. אף אחד מהנייל.

15. המשתנים המקריים  $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$  הם:

- א. בי"ת ושי"ה.
- ב. בלתי מתואמים אך לא בי"ת.
- ג. בי"ת אך לא שי"ה.
- ד. שי"ה אך לא בלתי מתואמים.

16. התוחלת  $E(X_1)$  היא:

א.  $\frac{n}{m+1}$

ב.  $\frac{m}{n+1}$

ג.  $\frac{m}{m+n}$

ד.  $\frac{n}{m+n}$

17. יהיו  $v = \text{Var}(X_1)$  ו-  $c = \text{Cov}(X_1, X_2)$ . היחס  $\frac{c}{v}$  שווה ל-:

א.  $\frac{1}{n}$

ב.  $-\frac{1}{n}$

ג.  $\frac{m+n}{mn}$

ד.  $-\frac{m+n}{mn}$

18. מקדם המתאם  $\rho(X_1, X_2)$  הוא:

א.  $\frac{1}{n}$

ב.  $-\frac{1}{n}$

ג.  $\frac{m+n}{mn}$

ד.  $-\frac{m+n}{mn}$