

סמסטר ב', מועד א', תשע"א, 13.6.2011

**בחינה ב' מבוא להסתברות" (המרצה: פרופ' אילון סולן)**

משך הבחינה שלוש שעות.  
מותר להשתמש בדף סיכום יחיד (דו-צדדי, כתוב או מודפס) ובמחשבון (ללא יכולות גרפיות/תכנותיות).

השאלון מורכב מ-20 שאלות. כל תשובה נכונה מזכה ב-6+ נקודות וכל תשובה שגויה מזכה ב-2- נקודות. מותר לסמן יותר מתשובה אחת לשאלה.  
אם צברת S נקודות, ציוןך  $\min(S, 100)$ .  
ייבדקו רק הסימונים בטבלה שבהמשך עמוד זה. שאר טופס המבחן והמחברת משמשים כטיוטא בלבד ולא יבדקו.  
יש למלא את מספר תעודת הזהות בשורה המתאימה.

**בהצלחה!!!**

תעודת זהות: \_\_\_\_\_

יש לסמן את התשובות בשלוש הטבלאות הבאות. את הסימונים לכל שאלה יש לסמן בעמודה המתאימה.

	1	2	3
א			
ב			
ג			
ד			

	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
א										
ב										
ג										
ד										

	14	15	16	17	18	19	20
א							
ב							
ג							
ד							

סוגיה ראשונה

יהיו  $X$  ו- $Y$  שני משתנים מקריים כלשהם (תלויים או בלתי תלויים) ויהי  $Z$  משתנה מקרי ברנולי עם פרמטר  $p$  בלתי תלוי ב- $X$  וב- $Y$ .  
 נגדיר:  $W = ZX + (1-Z)Y$  ו- $R = pX + (1-p)Y$ .

1. מה ניתן להגיד על התוחלות של  $W$  ושל  $R$ ?  
 (א) התוחלות שוות.

(ב) התוחלת של  $W$  קטנה יותר מהתוחלת של  $R$ .  
 (ג) התוחלת של  $W$  גדולה יותר גדולה יותר מהתוחלת של  $R$ .  
 (ד) הנתונים אינם מספיקים לקבוע את היחס בין התוחלות.

\* חלוקה תלויה אחר חלוקה מתאם.

2. השונות של  $W$  היא:

- (א)  $p \text{Var}(X) + (1-p) \text{Var}(Y)$   
 (ב)  $p^2 \text{Var}(X) + (1-p)^2 \text{Var}(Y)$   
 (ג)  $p^2 \text{Var}(X) + (1-p)^2 \text{Var}(Y) + 2p(1-p) \text{Cov}(X, Y)$   
 (ד)  $p \text{Var}(X) + (1-p) \text{Var}(Y) + p(1-p)(E[X] - E[Y])^2$

$$V(W) = E_Z (V(W|Z)) + V_Z (E(W|Z))$$

$V(W) = V(Y)$        $Z=0$  מתקיים      קב'נתן

$V(W) = V(X)$        $Z=1$  מתקיים      קב'נתן

$E_Z (V(W|Z)) = (1-p) \cdot V(Y) + p \cdot V(X)$       א כן

$E(W) = E(Y)$        $Z=0$  מתקיים      קב'נתן

$E(W) = E(X)$        $Z=1$  מתקיים      קב'נתן

$V_Z (E(W|Z)) = (1-p) \cdot E^2(Y) + p \cdot E^2(X)$       א כן

$- ((1-p)E(Y) + pE(X))^2$

מה ניתן להגיד על השונות של W ושל R?  
 מרכזים

3. מה ניתן להגיד על השונות של W ושל R?  
 (א)  $Var(W) = Var(R)$   
 (ב)  $Var(W) \leq Var(R)$  ולא ניתן לומר ש-(א) בהכרח מתקיים.  
 (ג)  $Var(W) \geq Var(R)$  ולא ניתן לומר ש-(א) בהכרח מתקיים.  
 (ד) הנתונים אינם מספיקים לקבוע את היחס בין השונות.

סוגיה שנייה

נתונה קובייה הוגנת (שבה כל פאה מתקבלת בהסתברות  $1/6$ ) עם 2 פאות לבנות ו-4 פאות שחורות. מטילים את הקובייה שוב ושוב עד שבסדרת ההטלות מתקבלות פאות משני הצבעים. יהי X מספר הפעמים שהקובייה הוטלה (כלומר, מספר ההטלות עד שהתקבלו פאות משני הצבעים). יהי W מספר ההטלות עד הפעם הראשונה שמתקבלת פאה לבנה. יהי B מספר ההטלות עד הפעם הראשונה שמתקבלת פאה שחורה.

4. ההתפלגות של X היא:  
 (א) גיאומטרית  
 (ב) בינומית  
 (ג) בינומית שלילית (אך לא גיאומטרית)  
 (ד) אף תשובה אינה נכונה.
- $$P(X=k) = \left(\frac{2}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{4}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{6}$$
- $k \geq 2$  ו/או

5. מה היא ההסתברות ש-X שווה ל-4?

- (א)  $1/16$   
 (ב)  $10/81$   
 (ג)  $17/81$   
 (ד)  $2/9$
- $$\left(\frac{2}{6}\right)^3 \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{4}{6}\right)^3 \cdot \frac{2}{6}$$

6. מה היא ההסתברות ש-X גדול ממש מ-4?

- (א)  $1/16$   
 (ב)  $10/81$   
 (ג)  $17/81$   
 (ד)  $2/9$
- (זריק 4 פעמים וזריקות יתקבלו פאות לבנות)  
 (זריק 4 פעמים וזריקות יתקבלו פאות שחורות)

7. מה היא ההסתברות ש-X שווה ל-5 בהינתן ש-X גדול ממש מ-4?

- (א)  $2/27$   
 (ב)  $6/17$   
 (ג)  $1/2$   
 (ד) אף תשובה אינה נכונה.
- $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
- (ב) חלק הכסתירות מותנה:

8. איך מתפלג X בהינתן ש-W שווה ל-1: מדצגים נוס' אחרז ואז מסמך

הנסאות פטוסים מתפלג  
 גאומטרית עם פתח יציא.

(א) X-1 מתפלג גיאומטרית

(ב) X-2 מתפלג גיאומטרית

(ג) X מתפלג בינומית שלילית

(ד) אף תשובה אינה נכונה

9. מה היא השונות של X בהינתן ש-W שווה ל-1:

שונות של מתנה גאומטרי:

$$\frac{\frac{2}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}$$

(א) 0.25

(ב) 0.75

(ג) 2

(ד) אף תשובה אינה נכונה

10. השונות של X בהינתן ש-W שווה ל-2:

(א) גדולה יותר מאשר התשובה לסעיף 9.

(ב) קטנה יותר מאשר התשובה לסעיף 9.

(ג) שווה לתשובה בסעיף 9.

(ד) אין מספיק נתונים כדי לענות על השאלה.

קפ'נתן (W=2), הפאה הפסנה  
 פ'תרה קוצלות שחורה. עסן  
 קוצלות (X=2). נק א הפט'  
 משתנה מנ'ון וכנה יש לו שונות  
 0.

ניתנה גיט צ'את הפסלה הפסונה:

$$\frac{2}{6} \left(1 + \frac{1}{6}\right) + \frac{4}{6} \left(1 + \frac{1}{6}\right)$$

11. למה שווה התוחלת של X:

(א) 2.25

(ב) 3

(ג) 3.5

(ד) 4

$$V(X) = V(W+B-1) \stackrel{\text{הצ'קה}}{=} V(W+B)$$

$$= V(W) + V(B) + 2 \cdot \text{Cov}(W, B)$$

$$V(W) = \frac{\frac{2}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} \quad V(B) = \frac{\frac{4}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2}$$

ולפיכך Cov מהו ג'סאנה 13.

12. למה שווה השונות של X:

(א) 0.5

(ב) 3.375

(ג) 4.25

(ד) 4.75

13. מה היא השונות המשותפת בין B ו-W:

(א) -6.75

(ב) -1

(ג) 0

(ד) 6.75

$$\text{Cov}(W, B) = E(WB) - E(W) \cdot E(B)$$

$$E(WB) = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{6}\right) + \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{6}\right)$$

יש כמה  
 דברים שמתנה:  
 אלת מ'ון פא  
 ע'י נוסדת  
 פ'ח ק'הסונות  
 אק נ'ת'י אלת

סוגיה שלישית

מחלקים 24 ילדים לשתי קבוצות, A ו-B, כך שכל ילד באופן בלתי תלוי באחרים שייד בהסתברות שווה לכל קבוצה.  
יהי  $X_0$  מספר הילדים בקבוצה A.

14. ההתפלגות של המשתנה המקרי  $X_0$  היא?

$$B\left(24, \frac{1}{2}\right)$$

- (א) בינומית
- (ב) אחידה
- (ג) היפרגאומטרית
- (ד) גאומטרית

אחר החלוקה הראשונית בוחרים באקראי ילד מבין 24 הילדים ומעבירים אותו מהקבוצה שבה היה לקבוצה השניה. חוזרים על כך שוב ושוב באופן בלתי תלוי בין הבחירות. נגדיר:

$X_n$  - מספר הילדים בקבוצה A לאחר  $n$  העברות.

$Y_n$  - מספר הילדים בקבוצה B לאחר  $n$  העברות.

צ"ל לכל ילד יש סיכוי שווה להיות  
קבוצה אחת מהקבוצות. אין תלות  
בין ילדים שונים. אם נבחרת ה"א  
אז יש משתנה  $B\left(24, \frac{1}{2}\right)$   
שהוא  $24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

15. מהי השונות של  $X_{17}$ ?

- (א) 12
- (ב) 6
- (ג) 3

(ד) לא ניתן לדעת מהנתונים.

16. המשתנים המקריים  $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n$  הינם:

- (א) תלויים ושווי התפלגות
- (ב) בלתי תלויים ושווי התפלגות
- (ג) בלתי תלויים ושוני התפלגות
- (ד) תלויים ושוני התפלגות

תלויים כי למשל

$$P(X_1=7 | X_0=3) = 0 \neq P(X_1=7)$$

$$\frac{X_0}{24} (X_0 - 1) + \frac{24 - X_0}{24} (X_0 + 1)$$

17. למה שווה  $E[X_1 | X_0]$  ?

א) 12

ב)  $1 + \frac{11}{12} X_1$

ג)  $1 + \frac{11}{12} X_0$  (ג)

ד) 23/12

$$\frac{X_0}{24} ((X_0 - 1) \cdot X_0) + \frac{24 - X_0}{24} ((X_0 + 1) \cdot X_0)$$

18. למה שווה  $E[X_1 \cdot X_0 | X_0]$  ?

א) 72

ב) 144

ג)  $X_0 + \frac{11}{12} X_1 X_0$

ד)  $X_0 + \frac{11}{12} X_0^2$  (ד)

$$\rho(X_0, X_1) = \frac{\text{Cov}(X_0, X_1)}{\sqrt{V(X_0) V(X_1)}}$$

19. מה הוא מקדם המתאם בין  $X_0$  ל- $X_1$  ?

א) 11/18

ב) 11/12 (ב)

ג) 1

ד) אף תשובה איננה נכונה

$$\text{Cov}(X_0, X_1) = E(X_0 \cdot X_1) - E(X_0) \cdot E(X_1)$$

$$E(X_0) = E(X_1) = 12$$

$$E(X_0 \cdot X_1) = E\left(X_0 + \frac{11}{12} X_0^2\right) =$$

$$E(X_0) + \frac{11}{12} (V(X_0) + E^2(X_0)) = \dots$$

20. מה הוא מקדם המתאם בין  $X_n$  ל- $X_{n+1}$  ?

א) -1 (א)

ב) 1

ג) 0

ד) -0.7

$$Y_n = 24 - X_n \quad \text{ככל ש } h \geq 0$$

א' קצר  
ב' ארוך  
ג' ארוך ואם כמותם  
ד' כטל