

**סמסטר א', מועד ב', תשע"ה, 13.3.2015**

**בחינה ב"מבוא להסתברות" (המרצה: פרופ' רון פלד)**

משך הבחינה שלוש שעות.

מותר להשתמש בדף סיכום כתוב (דו-צדדי) ובמחשבון ללא יכולות תכנות, ציור גרפים או תקשורת.

השאלון מורכב משאלה פתוחה ומשאלות רבות ברירה.

יש לסמן את התשובות לשאלות רבות הברירה בטופס המצורף בלבד!

תשובה שגויה לשאלה רבת ברירה אינה מפחיתה ניקוד.

מותר לסמן לכל היותר תשובה אחת לכל שאלה רבת ברירה.

סה"כ ישנן 110 נקודות במבחן. אם צברת  $S$  נקודות, ציונך  $\min(S, 100)$ .

בהצלחה!!!

## חלק א' – שאלה פתוחה – 26 נקודות

יהי  $n \geq 1$  שלם. יהיו  $X_1, X_2, \dots, X_n$  משתנים מקריים בלתי-תלויים המקיימים שעבור

$1 \leq i \leq n$ , ההתפלגות של המשתנה  $X_i$  נתונה ע"י

$$P(X_i = 2^i) = \frac{1}{2^i}, P(X_i = 1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{i+1}}, P(X_i = -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{i+1}}$$

עבור  $1 \leq i \leq n$ , נגדיר את המאורע  $A_i = \{X_i \neq 2^i\}$  ואת המשתנה המקרי  $Y_i = X_i \cdot 1_{A_i}$ .

נסמן  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  וכן  $T_n = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ .

(א) (6 נק') חשבו את  $E(T_n)$  ואת  $Var(T_n)$ .

(ב) (6 נק') הוכיחו כי לכל  $\epsilon > 0$  מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{T_n}{n}\right| > \epsilon\right) = 0$ .

(ג) (6 נק') עבור  $1 \leq k \leq n$  נסמן ב- $B_k$  את המאורע שקיים  $k \leq i \leq n$  עבורו  $X_i \neq Y_i$ .

$$P(B_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

(ד) (8 נק') הוכיחו כי לכל  $\epsilon > 0$  מתקיים  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \epsilon\right) = 0$ .

## חלק ב' – שאלות רבות ברירה – 7 נקודות לשאלה (סה"כ 84 נקודות)

### סוגיה ראשונה

על השולחן שלושה מטבעות מסודרים בשורה, כולם עם הצד עץ פונה כלפי מעלה. בכל תור באה לילך והופכת את אחד המטבעות, כאשר המטבע שנבחר הוא השמאלי ביותר בסיכוי 1/2, האמצעי בסיכוי 1/3 והימני ביותר בסיכוי 1/6, באופן בלתי תלוי בין התורות. נסמן ב- $X_n$  את כמות המטבעות עם הצד עץ פונה כלפי מעלה מיד בסיומם של  $n$  תורות.

(1) התוחלת של  $X_3$  היא

(א)  $\frac{71}{54}$

(ב)  $\frac{5}{3}$

(ג)  $\frac{35}{18}$

(ד) אף אחת מהנ"ל

(2) נסמן ב- $A_i$  את המאורע ש- $X_i$  שווה ל-2. נסמן  $S_n = 1_{A_1} + \dots + 1_{A_n}$ . מה נכון לגבי

הכמות  $\frac{E(S_n)}{n}$  כאשר  $n$  שואף לאינסוף?

(א) מתכנסת ל- $\frac{3}{8}$

(ב) מתכנסת ל- $\frac{1}{2}$

(ג) מתכנסת ל- $\frac{2}{3}$

(ד) אף אחת מהנ"ל

3) מה נכון לגבי ההסתברות  $P(X_n = 0)$  כאשר  $n$  שואף לאינסוף?

(א) מתכנסת ל  $\frac{1}{8}$

(ב) מתכנסת ל  $\frac{1}{4}$

(ג) מתכנסת ל  $\frac{1}{6}$

(ד) אף אחת מהנ"ל

4) מה נכון לגבי ההסתברות שבסיומם של  $n$  תורות, המטבע האמצעי והימני עם הצד עץ פונה כלפי מעלה, כאשר  $n$  שואף לאינסוף?

(א) מתכנסת ל  $\frac{1}{8}$

(ב) מתכנסת ל  $\frac{1}{4}$

(ג) מתכנסת ל  $\frac{1}{6}$

(ד) אף אחת מהנ"ל

### סוגיה שנייה

יהיו  $k, n$  מספרים שלמים המקיימים  $1 \leq k \leq n$ . בספארי נולדו לקרנף  $n$  גורים, אחד אחרי השני, כל אחד ממין זכר או נקבה בסיכוי  $1/2$  באופן בלתי תלוי בגורים האחרים. דוליטל מסתובב בגן החיות ופוגש גור הנבחר אקראית באופן אחיד מהגורים.

נסמן ב-  $A$  את המאורע ש-  $k$  הגורים הראשונים שנולדו הינם ממין זכר.

נסמן ב-  $B$  את המאורע שנולדו לפחות  $k$  גורים ממין זכר.

נסמן ב-  $E$  את המאורע שדוליטל פגש גור ממין זכר.

5) עבור  $k=1, n=2$ , מהי  $P(E|B)$  ?

(א)  $1/2$

(ב)  $2/3$

(ג)  $3/4$

(ד) אף אחת מהנ"ל

6) עבור  $k=4, n=12$ , מהי  $P(A|E)$  ?

(א)  $1/12$

(ב)  $1/16$

(ג)  $1/24$

(ד) אף אחת מהנ"ל

7) נניח כי  $k = n/2 + \sqrt{n}$  ו-  $n$  מספר שלם עבורו  $k$  שלם. מה נכון לגבי ההסתברות של

$B$  כאשר  $n$  שואף לאינסוף (לאורך סדרת מספרים שבה  $k$  שלם)?

(א) מתכנסת למספר קטן או שווה ל  $0.05$

(ב) מתכנסת למספר הנמצא בין  $0.25$  ל  $0.5$  (כולל הקצוות)

(ג) מתכנסת למספר הגדול ממש מ  $0.5$

(ד) אף אחת מהנ"ל

- 8) נניח כי  $k = n/2 + \sqrt{n}$  ו- $n$  מספר שלם עבורו  $k$  שלם. מה נכון לגבי ההסתברות של  $P(E|A)$  כאשר  $n$  שואף לאינסוף (לאורך סדרת מספרים שבה  $k$  שלם)?
- (א) מתכנסת למספר קטן או שווה ל 0.05  
 (ב) מתכנסת למספר הנמצא בין 0.25 ל 0.5 (כולל הקצוות)  
 (ג) מתכנסת למספר הגדול ממש מ 0.5  
 (ד) אף אחת מהנ"ל

### סוגיה שלישית

אלון מחזיק במטבע שנופל על עץ בהסתברות  $1/3$  וכן מחזיק במטבע שנופל על עץ בהסתברות  $1/2$ . כל אחד מהם, בנפרד ובאופן ב"ת בהטלות של האחר, מטיל את המטבע עד שיוצא לו לראשונה עץ. יהי  $X$  מספר ההטלות שביצע אלון ו- $Y$  מספר ההטלות שביצע בן.

9) מהי  $\Pr(X > Y)$  ?

- (א)  $1/2$   
 (ב)  $3/7$   
 (ג)  $4/7$   
 (ד) אף אחת מהנ"ל

10) מהי  $E(X | X = Y)$  ?

- (א)  $3/2$   
 (ב) 2  
 (ג) 3  
 (ד) אף אחת מהנ"ל

11) גדי, המחזיק מטבע שנופל על עץ בהסתברות  $2/3$ , החל להטיל את המטבע גם כן (באופן ב"ת באחרים) עד שיקבל עץ. נסמן ב- $Z$  את מספר ההטלות של גדי. מהי

$E(\min\{X, Y, Z\})$  ?

- (א)  $9/8$   
 (ב)  $3/2$   
 (ג) 2  
 (ד) אף אחת מהנ"ל

### שאלה מחוץ לסוגיה

12) יהיו  $X, Y$  משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים

$E(X) = E(Y) = \text{Var}(X) = \text{Var}(Y) = 1$ . מה נכון בהכרח לגבי  $\text{Var}(XY)$  ?

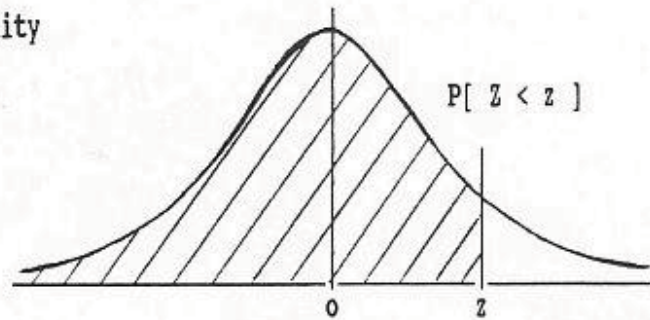
- (א) שווה ל-1  
 (ב) שווה ל-2  
 (ג) שווה ל-3  
 (ד) אף אחת מהנ"ל

## STANDARD STATISTICAL TABLES

### 1. Areas under the Normal Distribution

The table gives the cumulative probability up to the standardised normal value  $z$  i.e.

$$P[ Z < z ] = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}Z^2) dZ$$



$z$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9773	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9865	0.9868	0.9871	0.9874	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9980	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
$z$	3.00	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90
$P$	0.9986	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000