

פתרון מקוצר לבחינה של ד"ר גלית אשכנזי-גולן מ 12/10/12

19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
		+											+						א
+					+				+			+				+	+		ב
	+		+	+		+	+	+		+								+	ג
											+			+	+				ד

מספר הערות קצרות

שאלה 1

זו פונקציה יוצרת מומנטים של התפלגות בינומית.

שאלה 3

זו שונות של משתנה שהוא סכום של הקבוע 2 ומשתנה $P(1)$. הזזה לא משנה את השונות.

שאלה 4

$$\frac{1}{6} \left(\frac{5}{6} + \frac{4}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \right)$$

שאלות 5

השונות של אינדיקטור של רצף במקום מסוים היא $\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{12} = \frac{35}{144}$. יש תשעה אינדיקטורים כאלה. בין שני זוגות שאין להם איבר משותף יש אי תלות ולכן אין גם מתאם.

$$Cov(l_i, l_{i+1}) = \frac{\binom{6}{3}}{6^3} - \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12}$$

יש 8 זוגות של זוגות שכנים.

שאלה 6

ככל ש X_2 גדול יותר, כן גדל הסיכוי לרצף עולה החל מהמקום הראשון.

שאלה 7

לפי נוסחת הזנב לחישוב תוחלת של משתנה שמקבל רק ערכים טבעיים מתקיים

$$E(W) = \sum_{w=1}^{\infty} P(W \geq w) = \sum_{w=1}^6 P(W \geq w) = 1 + \frac{5}{12} + \frac{5}{54} + \frac{\binom{6}{4}}{6^4} + \frac{\binom{6}{5}}{6^5} + \frac{1}{6^6}$$

שאלה 9

ב 10 הטלות לא יכול להיות יותר מרצף אחד באורך 6. ברצף באורך 6 מופיע 6 בדיוק פעם אחת. בכל אחד מיתר 4 המקומות מופיע 6 בסיכוי $\frac{1}{6}$ באופן בלתי תלוי במקומות האחרים.

$$\text{לכן } T - 1 \sim \text{Bin}\left(4, \frac{1}{6}\right).$$

שאלה 11

יש קשר לינארי יורד.

שאלה 12

זהו סכום של אינדיקטורים של מאורעות שלכל אחד מהם יש הסתברות שאינה קטנה. לכן לא בקירוב פואסונית.

שאלה 13

כשיש תוצאה אחת גבוהה אז גדל הסיכוי לסכום גבוה. כשהמכסימום גדול, אז יש יותר ערכים אפשריים למינימום וגדל הפיזור.

שאלה 14

אם בשורה/עמודה/אלכסון יש 3 פעמים X אז יש 6 אפשרויות לבחור מקום ל X הנוסף. לכן ההסתברות שבשורה או טור או אלכסון מסוים זה יקרה היא $\frac{6}{\binom{9}{4}}$.

המאורעות של רצפים בשורות, עמודות, אלכסונים שונים הם זרים. לכן יש להכפיל את ההסתברות הזאת ב $2 + 3 + 3$ שזה המספר הכולל של שורות ועמודות ואלכסונים.

שאלה 15

בהנתן שבמשבצת האמצעית יש סימן 0, אז יש רק $\binom{8}{4}$ אפשרויות לבחור רביעיה של מקומות עבור האיקסים. יש 4 שורות או עמודות אפשריים, צריך לבחור מקום אחד נוסף ושוב המאורעות של רצפים בשני מקומות הם זרים.

שאלה 17

בהינתן $(W = w)$ תוחלת מספר ה- X בעמודה הימנית היא $\frac{w}{2}$, לכן תוחלת מספר השונים מ- X בעמודה הימנית היא $3 - \frac{w}{2}$ ותוחלת מספר ה-0 בעמודה הימנית היא $\frac{4}{5}\left(3 - \frac{w}{2}\right)$ ולכן תוחלת מספר ה-0 בשתי העמודות השמאליות היא $4 - \frac{4}{5}\left(3 - \frac{w}{2}\right)$. כך ככל ש W עולה, כן גדלה התוחלת המותנה של V . לכן המתאם חיובי.

שאלה 18

משיקולי סימטריה מתקיים $P(W > V) = P(W < V)$. לכן די להראות ש $P(W = V) > \frac{1}{3}$. אפשר לחשב את $P(W = V)$ לפי חלוקה למקרים של מספר ה- X ומספר ה-0 בעמודה האמצעית. בכל אחד ממקרים אלה נחשב את הסיכוי המותנה שיתקיים $(W = V)$.

שאלה 19

בהינתן $(W = 1)$ אין בעמודה השמאלית 0-ים ומספר ה-0-ים בעמודה האמצעית מתפלג HG ושונותו

$$\text{היא } \frac{2}{5} = 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \left(1 - \frac{2}{5}\right)$$

בהינתן $(W = 4)$ נחשב את שונות V לפי שונות של סכום של ארבעה אינדיקטורים של ארבעת ה-0.

לכל אחד מה-0 יש הסתברות $\frac{3}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$ להיות באחת משתי העמודות השמאליות (אם הוא לא

בשמאלית ביותר אז בסיכוי חצי הוא באמצעית).

$$\text{לכן סכום השונות של האינדיקטורים הוא } \frac{16}{25} = 4 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}$$

לגבי שני 0-ים שונים:

$$\text{ההסתברות ששניהם יהיו בעמודה השמאלית היא } \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$$

$$\text{ההסתברות שאחד מהם יהיה בעמודה השמאלית ואחר באמצעית היא } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{5} \cdot 2$$

ההסתברות ששניהם יהיו העמודה האמצעית הוא $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}$ (אם שניהם לא בשמאלית אז בסיכוי

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \text{ שניהם באמצעית).}$$

בסך הכל נקבל שבסיכוי $\frac{31}{50}$ שניהם באחת משתי השמאליות.

$$\text{לכן השונות המשותפת בין שני אינדיקטורים היא } \frac{1}{50} = \frac{4}{50} - \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}$$

$$\text{סכום השונות והשונות המשותפות הוא } \frac{2}{5} = \frac{16}{25} - 2 \cdot \left(\frac{4}{2}\right) \cdot \frac{1}{50}$$