

באתר שלי: <http://www.math.tau.ac.il/~shlomiru>
תוכלו למצוא פתרונות לבחינות רבות מהעבר.

פתרון הבחינה של פרופ' סמורודינסקי ופרופ' צירלסון מ 12.4.99

$$E\left(\frac{X}{n}\right) = 0.5 \qquad V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{n \cdot 0.5 \cdot 0.5}{n^2} = \frac{1}{4n} \qquad \underline{1}$$

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - 0.5\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{1}{4n \cdot 0.1^2} = \frac{25}{n}, \quad \frac{25}{n} \leq \frac{1}{16} \Rightarrow n \geq 400$$

$$\sigma\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad P\left(\left|\frac{X}{400} - 0.5\right| \geq 0.1\right) = 2 \left(1 - \phi\left(\frac{0.1}{\frac{1}{2 \cdot \sqrt{400}}}\right)\right) = 2 - 2\phi(4) < 0.0001 \quad \underline{2}$$

$$\approx 2 \left(1 - \phi\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}}\right)\right) = 2 - 2\phi(2) \approx 2 - 2 \cdot 0.977 = 0.046 \qquad \underline{3}$$

$$\frac{0.5 \cdot \frac{2}{3}}{0.5 \cdot \frac{2}{3} + 0.5 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \qquad \underline{4}$$

$$E(X_2) = E(X_1) = \frac{1}{2}, \quad E(X_3) = 0.5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + 0.5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0.5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0.5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = 0.5 \quad \underline{5}$$

$$E(X_1 + X_2 + X_3) = 1.5$$

$$0.5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + 0.5 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \qquad \underline{6}$$

$$V(X_1 + X_2 + X_3) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \qquad \underline{7}$$

$$+ 2(E(X_1 X_2) - 0.5 \cdot 0.5 + E(X_1 X_3) - 0.5 \cdot 0.5 + E(X_2 X_3) - 0.5 \cdot 0.5) = \frac{3}{4} + 6 \cdot \frac{1}{3} - 6 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\text{cov}(Y_1, Y_2) = \text{cov}(Y_1, Y_1) + \text{cov}(Y_1, X_2) = V(Y_1) + P(Y_1 = 2) \cdot 2 \cdot E(X_2 | Y_1 = 2) + \qquad \underline{8}$$

$$+ P(Y_1 = 1) \cdot 1 \cdot E(X_2 | Y_1 = 1) - E(Y_1) \cdot E(X_2) = 0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} + 0.5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}$$

$$- 1.5 \cdot 0.5 = \frac{1}{3}$$

$$\bar{Y}_2 = E(Y_2) + \frac{\text{cov}(Y_1, Y_2)}{V(Y_1)} \cdot (Y_1 - E(Y_1)) = 2 + \frac{1/3}{1/4} (Y_1 - 1.5) = \frac{4}{3} Y_1 \quad \underline{9}$$

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_{10}) \stackrel{\text{uncorrelated}}{=} E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_{10}) = 0 \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_{10}) = 0 \quad \underline{10}$$

$$E(X_i) = \frac{i}{i+1} \cdot 1 + \frac{1}{i+1} \cdot (-1) = \frac{i-1}{i+1} \quad \underline{11}$$

$$E(X_{11} \cdot X_{12} \cdot \dots \cdot X_{20}) \stackrel{\text{uncorrelated}}{=} \frac{10}{12} \cdot \frac{11}{13} \cdot \dots \cdot \frac{19}{21} = \frac{10 \cdot 11}{20 \cdot 21} = \frac{11}{42}$$

$$E(X_{10} \cdot X_{11} \cdot \dots \cdot X_{20}) = \frac{9}{11} \cdot \frac{10}{12} \cdot \dots \cdot \frac{19}{21} = \frac{9 \cdot 10}{20 \cdot 21} = \frac{3}{14}$$

$$P(\text{odd}) \cdot (-1) + (1 - P(\text{odd})) \cdot (+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(\text{odd}) = 0.5 \quad \underline{12}$$

$$P(\text{odd}) \cdot (-1) + (1 - P(\text{odd})) \cdot (+1) = \frac{3}{14} \quad \Rightarrow \quad P(\text{odd}) = \frac{11}{28} \quad \underline{13}$$

14 המאורע שיש לפחות אחד המסומן ב -1, מכיל את המאורע שיש מספר אי זוגי של כאלה, לכן

$$\frac{31}{84} \cdot \frac{11}{28} = \frac{33}{84} \quad \text{ולכן גדולה מ} \quad \frac{11}{28}$$

$$\frac{5! - \binom{4}{1} 4! + \binom{4}{2} 3! - \binom{4}{3} 2! + \binom{4}{4}}{5!} = \frac{53}{120} \quad \underline{15}$$

$$\frac{\binom{4}{1} \left(4! - \binom{3}{1} 3! + \binom{3}{2} 2! - \binom{3}{3} \right)}{5!} = \frac{11}{30} \quad \underline{16}$$

(בוחרים אחד שיהיה במקומו ודואגים שהיתר לא יהיו במקומם)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - \binom{n}{1} (n-1)! + \binom{n}{2} (n-2)! - \binom{n}{3} (n-3)! + \dots}{n!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} (-1)^k = \frac{1}{e} \quad \underline{17}$$

18 לגבי כל אחד יש סכוי $\frac{1}{m}$ והתוחלת שווה ל $\frac{n}{m}$ כסכום תוחלות.

$$\binom{5}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0.5 \quad \underline{19}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = 2E\left(\frac{X(X-1)}{2}\right) + E(X) - E^2(X) = \quad \underline{20}$$

$$= 2E(Y) + E(X) - E^2(X) = 2 \cdot 0.5 + 1 - 1^2 = 1$$