

© כל הזכויות שמורות
 קובץ זה נכתב על-ידי שלומי.
 אין להעתיקו ואין להציגו מחוץ לאתר של שלומי.

פתרון מקוצר לבחינה של ד"ר רון פלד מ 11/03/11

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
							+							+						א
	+		+	+	+			+			+				+		+		+	ב
+		+										+								ג
						+			+	+			+			+		+		ד

מספר הערות קצרות

שאלה 1

$$\frac{1+2+\dots+16}{2}$$

שאלה 2

יש 7 מטבעות שבהם 1 מופיע פעם אחת. במטבע 11 יש שני 1. Z - מספר ה-1 שהוא יראה.

$$Z = Z_1 + Z_{10} + Z_{12} + Z_{13} + Z_{14} + Z_{15} + Z_{16} + Z_{11}$$

$$V(Z) = 7V(Z_1) + V(Z_{11}) = 7 \cdot 0.5 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.5 \cdot 0.5$$

לכן Z_i ב"ת.

שאלה 3

סכום המספרים אחרי שלב 2 הוא בעל אותה התפלגות כמו אחרי שלב 1.

שאלה 4

$$Y_5 \sim B(16, 0.5)$$

שאלות 5

הם ב"ת כי בכל פעם מטילים מחדש את המטבעות. משתנים ב"ת הם גם בלתי מתואמים.

שאלה 6

$$V(Y_i) = 16 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 4, \quad E(Y_i) = \frac{16}{2} = 8$$

לכל i מתקיים

$$\sqrt{V\left(\frac{1}{100} \sum Y_i\right)} = \sqrt{\frac{100 \cdot 4}{100^2}} = 0.2$$

$$\phi\left(\frac{8.1-8}{0.2}\right) - \phi\left(\frac{7.8-8}{0.2}\right) \quad \text{ומבוקש}$$

שאלה 7

$$Y_1 \sim G(0.5)$$

שאלה 8

זהו סכום של שבעה גיאומטריים ב"ת.

שאלה 9

משתנה הוא גיאומטרי, אם כל ניסוי הוא אחרון בסיכוי קבוע בלי שום קשר לזהות התקופה ולמשתנים אחרים. כאן כל ניסוי הוא אחרון, אם מתקיימים שני דברים. הדבר הראשון הוא שהוא אחרון לגבי המשתנה הגיאומטרי שבמסגרתו הוא בוצע. הדבר השני הוא שאין עוד משתנה גיאומטרי אחריו. כל אחד משני הדברים קורה בסיכוי חצי באופן בלתי תלוי באחר. לכן המשתנה הוא גיאומטרי עם פרמטר רבע.

שאלה 10

$$E(S) = E_x(S | X) = E(2X) = 4$$

שאלה 11

$$\begin{aligned} E(SX) &= E_x(SX | X) = E(2X \cdot X) = E(2X^2) = 2E(X^2) = \\ &= 2(V(X) + E^2(X)) = 2\left(\frac{0.5}{0.5^2} + 2^2\right) = 12 \end{aligned}$$

שאלה 12

$$\begin{aligned} V(S) &= E_x(V(S | X)) + V_x(E(S | X)) = \\ &= E\left(X \cdot \frac{0.5}{0.5^2}\right) + V(2X) = 2E(X) + 4V(X) = \\ &= 2 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{0.5}{0.5^2} \end{aligned}$$

שאלה 13

$$Cov(S, Y_1) = Cov\left(\left(Y_1 + \sum_{i \geq 2} Y_i\right), Y_1\right) \stackrel{\text{here}}{=} Cov(Y_1, Y_1) = V(Y_1) = \frac{0.5}{0.5^2} = 2$$

שאלה 14

תוצאה ראשונה שהיא בקבוצה $\{2,4,5\}$ היא בקבוצה $\{2,4\}$ בסיכוי $\frac{0.2+0.2}{0.2+0.2+0.2}$

או

$a = \frac{1}{5} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} a$ - הסיכוי המבוקש. נתנה בתוצאת ההטלה הראשונה ונקבל משוואה
(בסיכוי $\frac{2}{5}$ לא נופלת הכרעה בפעם הראשונה וחוזרים לסיכוי המקורי).

שאלה 15

אם 4 או 5 יופיעו לפני 1 אז תוחלת הרווח של אהרון תהיה $\frac{4+5}{2}$. אחרת הוא יקבל בדיוק שקל אחד.

$$\text{התוחלת היא } \frac{2}{3} \cdot \frac{4+5}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{10}{3}$$

שאלה 16

תוחלת הרווח של יתרו היא $\frac{13}{4} = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{3+4+5}{3}$ (אפשר גם לשכנע ללא חישוב שתוחלת הרווח של יתרו נמוכה מזו של אהרון).

שאלה 17

מספר המשחקים שיתרו ישחק מתפלג $G\left(\frac{4}{5}\right)$ והוא בעל תוחלת $\frac{5}{4}$.
תוחלת ההפרש בין הפרס לתשלום היא $\frac{13}{4} - \frac{5}{4} = 2$.

שאלה 18

כעת תוחלת הרווח של אהרון היא $\frac{10}{3} - \frac{1}{3/5} < 2$

שאלה 19

$$1 = P(A \cup B) \stackrel{\text{here}}{\leq} P(A) + P(B) \stackrel{\text{here}}{=} 2P(A)$$

התנאי הראשון לא מספיק אם למשל $P(A) = 0, P(B) = 1$

שאלה 20

אם $P(A \cup B) = 1$ אז $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0$

נניח בשלילה ש $P(\bar{A}), P(\bar{B}) > 0$ אז $Cov(1_{\bar{A}}, 1_{\bar{B}}) = E(1_{\bar{A}}, 1_{\bar{B}}) - E(1_{\bar{A}})E(1_{\bar{B}}) < 0$

אך $Cov(1_{\bar{A}}, 1_{\bar{B}}) = Cov(1 - 1_A, 1 - 1_B) = (-1)^2 Cov(1_A, 1_B)$

שלומי