

בתרון הפדיוני של הרווח ג'יט ופרוי' סדר N 11/3/05

$$\begin{aligned}
 P(X+Y+Z) &= P(X+Y, Z=0) + P(X+Y, Z=1) \quad (1) \\
 &= P(X+Y) \cdot P(Z=0) + P(X+Y) \cdot P(Z=1) = \\
 &= P(X+Y) \cdot 0.5 + P(X+Y) \cdot 0.5 = \\
 &= (P(X+Y) + P(X+Y)) \cdot 0.5 = 0.5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(W=1) &= P(Z=1) \cdot P(X=1) + P(Z=0) \cdot P(Y=1) \quad (2) \\
 &\geq P(Z=1) \cdot P(X=1) = 0.5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E(W) &= E(2X + (1-Z)Y) = E(2X) + E((1-Z)Y) = \quad (3) \\
 &= E(Z) \cdot E(X) + E(1-Z) \cdot E(Y) = 0.5 \cdot E(X) + 0.5 \cdot E(Y) = \\
 &= E\left(\frac{X+Y}{2}\right)
 \end{aligned}$$

השאלה היא על קבועת $Var(W)$ ו- $Var(X+Y)$ ונראה כי:

$$\begin{aligned}
 Var(W) &= E(Var(2X + (1-Z)Y)) + Var(E(2X + (1-Z)Y)) = \\
 &= 0.5 Var(X) + 0.5 Var(Y) + 0.5 \left(E(X) - \frac{E(X)+E(Y)}{2} \right)^2 + \\
 &+ 0.5 \left(E(Y) - \frac{E(X)+E(Y)}{2} \right)^2 = 0.5 \cdot Var(X+Y) + 0.5 \left(\frac{E(X)-E(Y)}{2} \right)^2 + \\
 &+ 0.5 \cdot \left(\frac{E(Y)-E(X)}{2} \right)^2
 \end{aligned}$$

* $Var(X) + Var(Y) = Var(X+Y)$ הסיבה היא

$$E(W|Z) = E(2X + (1-Z)Y) = Z \cdot E(X) + (1-Z) \cdot E(Y) \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 Cov(X, W) &= E(X \cdot W) - E(X) \cdot E(W) = E(2X^2 + (1-Z)XY) \quad (5) \\
 &- E(X) \cdot E\left(\frac{X+Y}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot E(X^2) + \frac{1}{2} \cdot E(X \cdot Y) - \frac{1}{2} E(X)^2 \\
 &- \frac{1}{2} E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{2} Var(X) + \frac{1}{2} Cov(X, Y) \stackrel{\text{סימטריה}}{=} \frac{1}{2} Var(X)
 \end{aligned}$$

$$E(s_i) = E_{X_i}(s_i | X_i) = E_{X_i}\left(\frac{1+6}{2} \cdot X_i\right) = \frac{7}{2} \quad (3).6$$

$$\begin{aligned} \text{cov}(X_i, s_i) &= E(X_i \cdot s_i) - E(X_i) \cdot E(s_i) = \quad (7).7 \\ &= E_{X_i}(X_i \cdot s_i) - 1 \cdot \frac{7}{2} = E\left(X_i \cdot \frac{7}{2} \cdot X_i\right) - \frac{7}{2} = \\ &= \frac{7}{2} (E(X_i^2) - 1) = \frac{7}{2} (\text{Var}(X_i) + E^2(X_i) - 1) = \\ &= \frac{7}{2} \left(n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-1}{n} + 1 - 1\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{n-1}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(s_i=2) &= P(X_i=0) \cdot 0 + P(X_i=1) \cdot \frac{1}{6} + P(X_i=2) \cdot \frac{1}{36} \quad (3).8 \\ &+ P(X_i>2) \cdot 0 = \frac{1}{6} \binom{n}{1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{36} = \\ &= \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} + \frac{1}{72} \cdot n \cdot (n-1) \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-2} \end{aligned}$$

$$P(X_1, X_2 + \dots + X_n) = P(X_1, n - X_1) \stackrel{*}{=} 1 \quad (3).9$$

פיתוחם הן משנה סדרן במוקד מ'טלית ורצת של
כאן -1

$$e_0(a) = E(Y | X=0) = \frac{a}{a + (\frac{1}{2} - a)} \cdot 2 + \frac{\frac{1}{2} - a}{a + (\frac{1}{2} - a)} \cdot 4 = \quad (k).10$$

$$= 4 - 4a$$

$$e_1(a) = \frac{\frac{1}{2} - a}{\frac{1}{2}} \cdot 2 + \frac{a}{\frac{1}{2}} \cdot 4 = 2 + 4a \quad (c).11$$

$$4 - 4a \leq 2 + 4a \iff 2 \leq 8a \iff a \geq \frac{1}{4}$$

אלה a לא מקרה ערכים אצלם $\frac{1}{2}$ כי פסתה לא
'כמה מ'פ'ות קטנה מ 0.

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) &= a \cdot 2 \cdot 0 + \left(\frac{1}{2} - a\right) \cdot 0 \cdot 4 + \left(\frac{1}{2} - a\right) \cdot 1 \cdot 2 + \quad (3).12 \\ &+ a \cdot 1 \cdot 4 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 4\right) = 1 - 2a + 4a - 1.5 = \\ &= 2a - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

אם שיה לאם איתם $a = \frac{1}{4}$.

$$(3).13 \quad \text{עבור } a \neq \frac{1}{4} \text{ הם מתאמה ולכן קוצב' תלויים. עבור } a = \frac{1}{4} \text{ מתקיים עבור}$$

כס של ערבה אלבהים $P(X=k, Y=l) = \frac{1}{4} P(X=k)P(Y=l)$ הם רל'ת תלויים

14. (3) ג'ס'כו' $\frac{1}{2}$ נ'ת'מ'ל ד'מ'ל'ת ד'ת'ק'ן ו'ל'א ד'ס'כו' $\frac{1}{2}$ נ'ק'ד'ת ה'ל'א ו'ל'א ד'ק'ד'מ'ק נ'ל'י'ם י'ק א'ת'ר ד'מ'ל'ת'ת ד'ל' ש'נ' ה'פ'ל'י'ם ו'ל'א נ'ק'ד'ת ד'ל'ת נ'א'ל'י'ם. ל'כ'ן ד'ס'כו' ל'א ל'מ'ל'ת $\frac{1}{4}$ נ'ק'ד'ת ד'ל'ת ה'ל'י'ם ל'כ'ן כ'כ' ל'א מ'ש'ע'ב'ה ד'י'ט'מ'י' ו'ל'מ' $1-x$ א'ל'ט ד'י'ט'מ'י'. ל'מ' מ'מ'ל'צ'ת ל' ש'נ' מ'ש'ע'י'ם ד'י'ט'מ'י' ל'א מ'ק'ד'ת ע'ר'ק ק'ל'ט'י' ד'ד'מ'ת'ר'י'ת ל'א ל'מ'ל'ת $\frac{1}{4}$.

15. (ד) א'ל'מ' $x_1=0$ א'ל'א x כ'כ' מ'כ'ח ח'ת'ל'ו'ל'ת ד'ל'ת'י' ת'ל'ו'י'ת ל'כ'ל'ם

א'ל'ת' מ'ד'ק' ל' ס'כ' $\frac{1}{2}$ ג'ס'כו' $\frac{1}{2}$

$$E\left(\frac{1}{1+x} \mid x_1=0\right) = \sum_{z=0}^n \frac{1}{z+1} \cdot \binom{h}{z} \cdot 0.5^z \cdot 0.5^{h-z} =$$

$$= \frac{1}{h+1} \sum_{z=0}^n \binom{h+1}{z+1} \cdot 0.5^z \cdot 0.5^{h-z} = \frac{2}{h+1} \sum_{z=1}^{h+1} \binom{h+1}{z} \cdot 0.5^z \cdot 0.5^{h+1-z} =$$

$$= \frac{2}{h+1} \left(1 - \underbrace{\binom{h+1}{0} \cdot 0.5^0 \cdot 0.5^{h+1}}_{\substack{\text{ד'ד'מ'ת'ר'י'ת מ'ש'ע'ב'ה} \\ \text{ל'ק'ד'ת א'ת} \\ \text{ד'ע'ר'ק 0}}}\right) = \frac{2}{h+1} \cdot (1 - 0.5^{h+1}) =$$

$$= \frac{2 - 0.5^{h+1}}{h+1}$$

16. (ד) ד'ה'ל'א'ה ד'מ'ל'ט'ו'ה ל'א ד'ל'ת'ה ל' ה'ל'א. ד'ק'ד'מ'ק ד'ת'ק'ד'ת ה'ל'א א'ת'ל'ט'ת מ'ד'ן ד'ה'ל'ט'ו'ת $1, 2, 3, \dots, h+1$, ל'כ'ן ע'ר'ק מ'ת'ק'ד'ת ד'ד'מ'ת'ר'י'ת מ'ל'ו'ה ל'כ'ן ד'ת'ל'מ'ת'ת ד'מ'ל'ט'ו'ת $\frac{h+1}{2} = \frac{2+h-1}{2}$ - מ'ש'ע'ב'ה א'ת'ר'י'ת.

17. (ק) א'ל'מ' $(x_3=0)$ א'ל'א x_3 ד'מ'ל'ט'ת ד'ה'ל'א'ה ל' מ'ל'ט'ת ד'מ'ל'ט'ת ד'מ'ל'ט'ת, $E(x_3 | x_2=0) = 0.5$ א'ל'מ' $(x_2=1)$ א'ל'א x_3 י'ם ד'ד'מ'ת'ר'י'ת ח'ל'ו'ת x_3 י'כ'ה ד'מ'ל'ט'ת ד'ה'ל'א'ה ד'ת'ל'מ'ת ו'ד'ד'מ'ת'ר'י'ת ח'ל'ו'ת ש'ד'מ'ל'ט'ו'ת י'כ'ה ד'מ'ל'ט'ת מ'ל'ט'ו'ת מ'ת'מ'ז ל'ת'ק'ן ה'ל'א, ל'כ'ן ד'ה'ל'א'ה ל' ד'ה'ל'א'ה ל' ע'ר'ק $\frac{1}{2}$. ל'כ'ן $E(x_3 | x_2=1) > E(x_3 | x_2=0)$ ו'ל'כ'ן ד'מ'ל'ט'ת מ'ל'ט'ו'ת.

$$P(x_1 + x_2 = 2) = P(\underbrace{\text{ד'ת'ל'מ'ט}}_{\text{ד'מ'ל'ט'ת ח'ל'ו'ת}}) \cdot 1 \cdot 0.5 + P(\underbrace{\text{ד'ת'ל'מ'ט}}_{\text{ד'מ'ל'ט'ת ח'ל'ו'ת}}) \cdot 0.5 \cdot 1 = \text{?} \quad 18$$

$$= 0.5$$