

סמסטר א', מועד ב', תשס"ה
תאריך הבחינה: 11.03.2005
מספר קורס: 0365-1102

מס' מחברת: _____
מס' ת.ז.: _____

בחינה במבוא להסתברות

המרצים: פרופ' דוד גילת, פרופ' אהוד לרר

משך הבחינה: 3 שעות.

חומר עזר: מותר להשתמש בדף סיכום אישי. מחשב כיס מותר – אך מיותר.

הוראות ושיטת הניקוד: השאלון מורכב מ-18 שאלות המבוססות על 4 סוגיות. לכל שאלה ניתנות 4 תשובות, שאחת ורק אחת מהן נכונה. סימון התשובה הנכונה בצורה ברורה בטבלת התשובות המופיעה בעמוד זה מזכה ב-6 נקודות זכות. סימון תשובה שגויה נושא 2 נקודות חובה. הנבחן רשאי לסמן יותר מתשובה אחת באותה שאלה. אי סימון אף אחת מהתשובות יחשב כהצהרה "איני יודע", ונקודות זכות אחת תינתן במקרה זה. טווח הנקודות האפשרי הוא -108 עד 108, והציון של נבחן הצובר N נקודות יהיה $\max\{0, \min\{N, 100\}\}$. לעזרתך מצורפת בסוף טופס הבחינה טבלת שטחים מתחת לעקום הנורמלי.

בהצלחה!

	1	2	3	4	5
א					
ב					
ג					
ד					

	6	7	8	9
א				
ב				
ג				
ד				

	10	11	12	13
א				
ב				
ג				
ד				

	14	15	16	17	18
א					
ב					
ג					
ד					

לשימוש הבודק:

תשובות נכונות	תשובות שגויות	תשובות "איני יודע"	ציון סופי

סוגיה 1

יהיו X, Y, Z משתנים מקריים בלתי-תלויים בעלי ערכים שלמים בלבד. ההתפלגות של Z נתונה על ידי $P(Z=0) = P(Z=1) = \frac{1}{2}$. כמו כן נגדיר $W = ZX + (1-Z)Y$.

1. ההסתברות שהסכום $X + Y + Z$ הוא זוגי גדולה מ- $\frac{1}{2}$ כשהסתברות המאורע "הסכום $X + Y$ הוא זוגי" גדולה מ- $\frac{1}{2}$.
- א. תמיד שווה ל- $\frac{1}{2}$.
- ב. שווה ל- $\frac{1}{2}$ רק כאשר X ו- Y שויי התפלגות.
- ג. תמיד שווה ל- $\frac{1}{2}$.
- ד. דרושה אינפורמציה נוספת על התפלגות X ו- Y כדי להכריע.

2. אם $P(X=1) = \frac{1}{3}$, אז $P(W=1)$
- א. בדיוק $\frac{1}{3}$.
- ב. לפחות $\frac{1}{6}$.
- ג. לכל היותר $\frac{1}{6}$.
- ד. בדיוק $\frac{1}{6}$.

3. נניח ש- X ו- Y בעלי שונות סופיות, ונתבונן בשווייונים:

- (i) $E(W) = E\left(\frac{X+Y}{2}\right)$
- (ii) $Var(W) = \frac{1}{2}Var(X+Y) + \left(E\left(\frac{X-Y}{2}\right)\right)^2$
- א. שניהם נכונים.
- ב. רק (i) נכון.
- ג. רק (ii) נכון.
- ד. שניהם לא נכונים.

4. התוחלת המותנה $E(W|Z)$ שווה ל-

- א. $\frac{1}{2}(E(X) + E(Y))$.
- ב. $ZE(X) + (1-Z)E(Y)$.
- ג. $E(W)$.
- ד. אף אחת מהתשובות.

5. השונות המשותפת $cov(X, W)$ שווה ל-

- א. $cov(Z, X)$.
- ב. $\frac{1}{2}(Var(X) + Var(Y))$.
- ג. $cov(Z, X+Y)$.
- ד. $\frac{1}{2}Var(X)$.

סוגיה 2

n קוביות הוגנות מפוזרות באקראי ב- n תאים הממוספרים מ-1 ועד n , כך שכל n^n הפיזורים האפשריים שווים סיכוי. בכל תא מטילים פעם אחת את כל הקוביות שנמצאות בו. נגדיר:

X_i , מספר הקוביות שנמצאות בתא i .

S_i , סכום תוצאות הקוביות שהוטלו בתא i .

6. התוחלת $E(S_i)$ שווה ל-

- | | |
|--|------------------------------------|
| <p>א. לא ניתן לחשב את $E(S_i)$, כי מספר הקוביות בתא i הוא משתנה מקרי</p> | <p>ב. $\frac{7}{3}$</p> |
| <p>ג. $\frac{8}{3}$</p> | <p>ד. $\frac{7}{2}$</p> |

7. השונות המשותפת $\text{cov}(X_i, S_i)$ שווה ל-

- | | |
|---|---|
| <p>א. $\frac{8}{3} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$</p> | <p>ב. $\frac{7}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$</p> |
| <p>ג. $\frac{49}{4}$</p> | <p>ד. $3n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$</p> |

רמז: $\text{cov}(X_i, S_i) = \text{cov}(X_i, E(S_i | X_i))$

8. תא i נקרא "מיוחד" אם $S_i = 2$. ההסתברות שתא i מיוחד שווה ל-

- | | |
|---|---|
| <p>א. $\frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$</p> | <p>ב. $\frac{1}{36} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$</p> |
| <p>ג. $\binom{n}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2}$</p> | <p>ד. $\frac{13}{72} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-1}$</p> |

9. מקדם המתאם $\rho(X_1, X_2 + \dots + X_n)$ שווה ל-

- | | |
|---|--|
| <p>א. $\frac{1}{n} - 1$</p> | <p>ב. $-n \left(\frac{1}{n} - 1\right)$</p> |
| <p>ג. $1 - \frac{1}{n(n-1)}$</p> | <p>ד. אף אחת מהתשובות</p> |

סוגיה 3

ההתפלגות המשותפת של X ו- Y נתונה בטבלה הבאה:

$X \setminus Y$	2	4
0	a	$\frac{1}{2} - a$
1	$\frac{1}{2} - a$	a

כאשר $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. נגדיר שתי פונקציות $e_0(a) = E(Y | X = 0)$, $e_1(a) = E(Y | X = 1)$.

10. הפונקציה $e_0(a)$ היא

- א. פונקציה לינארית יורדת של a
- ב. פונקציה לינארית עולה של a
- ג. לא תלויה ב- a (קבועה)
- ד. לא פונקציה לינארית של a

11. $e_0(a) \leq e_1(a)$

- א. לכל $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$
- ב. רק עבור $0 \leq a \leq \frac{1}{4}$
- ג. רק עבור $\frac{1}{4} \leq a \leq \frac{1}{2}$
- ד. לכל $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ $e_0(a) > e_1(a)$

12. X ו- Y בלתי-מתואמים

- א. לכל a
- ב. עבור אף ערך של a
- ג. לכל $\frac{1}{6} \leq a \leq \frac{1}{3}$
- ד. רק עבור $a = \frac{1}{4}$

13. X ו- Y בלתי-תלויים

- א. לכל a
- ב. עבור אף ערך של a
- ג. לכל $\frac{1}{6} \leq a \leq \frac{1}{3}$
- ד. רק עבור $a = \frac{1}{4}$

סוגיה 4

בכד יש שני מטבעות: למטבע א' יש שני ראשים, ולמטבע ב' יש ראש וזנב (עם הסתברות זהה לשניהם). מושכים מטבע באקראי מהכד ומטילים אותו פעם אחת. אם מתקבל זנב – מטילים את אותו המטבע n פעמים נוספות. אם מתקבל ראש – מחליפים מטבע ואותו מטילים n פעמים. הערה: בכל מקרה מבצעים בדיוק $n+1$ הטלות.

יהי Y מספר הראשים ב- $n+1$ ההטלות. לכל $i=1, \dots, n+1$, יהי X_i האינדיקטור למאורע "ראש בהטלה i ", כלומר: $X_i = 1$ אם התקבל ראש בהטלה i , ו- $X_i = 0$ אחרת.

14. סמן את התשובה הנכונה

- א. $Y - X_1$ הוא משתנה מקרי בינומי
 ב. Y הוא משתנה מקרי בינומי
 ג. $Y = \frac{1}{2}Z_1 + \frac{1}{2}Z_2$, כאשר Z_1 ו- Z_2 הם משתנים מקריים בינומיים בלתי-תלויים
 ד. אף אחת מהתשובות

15. $E\left(\frac{1}{Y+1} \mid X_1 = 0\right)$ שווה ל-

- א. $\frac{1}{(n/2)+1}$
 ב. $\frac{1}{(n/2)-1}$
 ג. $\frac{2-(1/2)^n}{n+1}$
 ד. $\frac{1-(1/2)^n}{(n/2)+1}$

16. יהי M מספר ההטלה הראשונה שבה מתקבל ראש. $E(M \mid Y=1, X_1=0)$ שווה ל-

- א. $\frac{n}{3}$
 ב. $\frac{n}{2}$
 ג. $\frac{n+3}{2}$
 ד. אף אחת מהתשובות

17. המשתנים המקריים X_2 ו- X_3 הם

- א. בלתי-תלויים
 ב. מתואמים
 ג. בלתי-תלויים אם $X_1 = 1$, ותלויים אם $X_1 = 0$
 ד. אין מספיק נתונים על מנת לענות על השאלה

18. $P(X_1 + X_2 = 2)$ שווה ל-

- א. $\frac{1}{4}$
 ב. $\frac{1}{2}$
 ג. $\frac{5}{8}$
 ד. $\frac{3}{8}$