

פתרון מקוצר לבחינה של פרופ' רון פלד מ 11/02/15

חלק א

סעיף א

יש $n(n-1)/2$ זוגות של איברים. לגבי כל זוג, יוחלף הסדר שלו בסיכוי 0.5. לכן התוחלת היא $n(n-1)/4$.

סעיף ב

יש $n(n-1)/2$ אינדיקטורים שמייצגם החלפות אפשריות של זוגות. לכל אינדיקטור כזה יש הסתברות של 0.5, ולכן יש לו שונות של 0.25. סכום השונות של האינדיקטורים הוא $n(n-1)/8$.

כל שלשה מגדירה שלושה זוגות של אינדיקטורים שהם תלויים. יש בסך הכל $\binom{n}{3}$ שלשות. בשלשה יש שני זוגות של אינדיקטורים בעלי שונות משותפת של $1/3 - 0.5 \cdot 0.5 = 1/12$. בשלשה יש זוג אחד של אינדיקטורים בעלי שונות משותפת של $1/6 - 0.5 \cdot 0.5 = -1/12$. לכן בסך הכל השונות היא $\frac{n(n-1)}{8} + 2\binom{n}{3}\frac{1}{12}$.

סעיף ג

תוחלת סכום האינדיקטורים, היא לפי א' $n(n-1)/4$. לפי ב' שונות סכום האינדיקטורים קטנה מלמשל $5n^3$. עבור n מספיק גדול, אם הסכום רחוק מ $n^2/4$ בלפחות $n^{3/2+\epsilon}$, אז הוא רחוק מ $n(n-1)/4$ בלפחות $n^{3/2+\epsilon/2}$. לפי אי שיוויון צ'בישב, יש חסם של $5n^3 / (n^{3/2+\epsilon/2})^2$. גודל זה שואף ל 0, כאשר $n \rightarrow \infty$.

סעיף ד

מכיוון שכל הפרמוטציות הן שוות הסתברות, אז כל הפרמוטציות של j האיברים הקטנים ביותר הן שוות הסתברות ומיקומו בפרמוטציה של האיבר ה- j ביחס לקטנים ממנו, מתפלג אחיד בין 1 ל j . אם מיקומו ביחס אליהם הוא k . אז $j-k$ איברים מהם משיגים אותו בפרמוטציה.

חלק ב

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
ד	ג	ג	ב	ג	ג	ב	ב	ב	ג	ד	א

הסברים קצרים

שאלה 1

יש $2n$ משימות פוטנציאליות. כל אחת מהן הופכת למשימה של יוסי בסיכוי $1/2$, וכל משימה של יוסי הופכת למשימה של אחד משלושת העובדים הראשונים בסיכוי $3/n$. לכן מספר המשימות של שלושת העובדים הראשונים היא $Bin(2n, 3/2n)$

שאלה 2

לפי שיקול דומה לזה של שאלה 1, X_1 ו X_2 מתפלגים $Bin(2n, 1/2n)$ ו $X_1 + X_2$ מתפלג $Bin(2n, 1/n)$. מתקיים $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2) + 2Cov(X_1, X_2)$. לכן

$$Cov(X_1, X_2) = \frac{Var(X_1 + X_2) - Var(X_1) - Var(X_2)}{2} = \frac{2n \cdot 1/n \cdot (1 - 1/n) - 2 \cdot 2n \cdot 1/2n \cdot (1 - 1/2n)}{2} = -\frac{1}{2n}$$

שאלה 3

עובד מסוים לא מקבל אף משימה בהסתברות $(1 - 1/2n)^{2n}$. כאשר $n \rightarrow \infty$ גודל זה שואף ל $1/e$. תוחלת סכום שווה תמיד לסכום התוחלות.

הערה

כאשר $n \rightarrow \infty$ ההתפלגות הגבולית של משתנה $Bin(2n, 1/2n)$ היא של משתנה $P(1)$.

שאלה 4

כל אחת מ $2n$ המשימות שיוסי עשוי לקבל, לא מגיעות לאף אחד בסיכוי $1/2$, מגיעות לשליש הראשון של העובדים בסיכוי $1/6$, מגיעות לשליש השני של העובדים בסיכוי $1/6$ או מגיעות לשליש השלישי של העובדים בסיכוי $1/6$. לכן יש סכום של $2n$ משתנים מקריים שכל אחד מהם מקבל את הערך 0 בסיכוי $2/3$ ואת כל אחד מהערכים של 1 ושל -1 בסיכוי $1/6$. לכל אחד ממשתנים מקריים אלה יש שונות של $1/3$ ושונות הסכום שלהם היא $2k$. לפי משפט הגבול המרכזי ההתפלגות הגבולית היא נורמלית.

שאלה 5

מתקיים $(Z \geq 0)$ אם"ם לא מתקיים $(X < 0)$ וגם $(Z - X < 0)$.

שאלה 6

למשל, יש הסתברות חיובית לכך ש $(Z < 0)$, אך בהינתן $(X = 1)$, זה בלתי אפשרי.

שאלה 7

השלושה מקבלת ערכים מבין $\{(1,2,1), (-1,-2,-1), (1,0,1), (1,0,-1), (-1,0,1), (-1,0,-1)\}$.
שתי האפשרויות הראשונות מתקבלות כל אחת בסיכוי $1/4$ והבאות מתקבלות בהסתברויות
 $p, 1/4 - p, 1/4 - p, p$.
אם Y הוא העתק של X או של $Z - X$ (כלומר $p = 0$ או $p = 1/4$), אז קיימים 4 צירופים.
אחרת יש 6 צירופים.

שאלה 8

השונות המכסימלית של הסכום מתקבלת עבור $p = 1/4$ והשונות המינימלית מתקבלת
עבור $p = 0$.

שאלה 9

נגדיר מצבים שייצגו את הכובעים שאריק ובנוץ לובשים בהתאמה:
1- שחור, לבן 2-לבן, שחור 3-שחור, אדום 4-אדום, שחור 5-לבן, אדום 6-אדום, לבן
מטריצת המעבר היא

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

זו מטריצת מעבר של שרשרת בלתי פריקה שבה לכל מצב יש הסתברות סטציונרית שווה
של $1/6$ (זהו הילוך מקרי פשוט על מעגל באורך 6).

שאלה 10

השרשרת המתוארת בשאלה 9 היא מחזורית (כל הילוך מקרי פשוט על מעגל באורך זוגי
הוא מחזורי) לכן אין למצב הסתברות גבולית.

שאלה 11

מטריצת המעבר היא כעת

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

זו שרשרת מרקוב של הילוך מקרי פשוט על מעגל באורך 6 שבו חיברנו זוג מסוים של קודקודים נגדיים.
 בשרשרת של הילוך מקרי פשוט על גרף, ההסתברויות הסטציונריות פופרציונאליות לדרגות.
 לכן וקטור ההסתברויות הסטציונריות הוא $(3/14, 3/14, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7)$.
 ההסתברות הגבולית בזמנים זוגיים היא $6/14$ ובזמנים אי זוגיים $2/7$.

הערה

ניתן לחשב את וקטור ההסתברויות הסטציונריות גם בדרך אחרת:
 משיקולי סימטריה יש שני מצבים בעלי אותה הסתברות סטציונרית שנקרא לה a ויש
 ארבעה מצבים בעלי אותה הסתברות גבולית שנקרא לה b .
 לפי המשוואות למציאת וקטור סטציונרי מתקיים:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b \\ 2a + 4b = 1 \end{cases}$$

שאלה 12

למרות שהשרשרת מחזורית, יש הסתברות גבולית ללבישת כובע אדום והיא $2/7$. בזמנים
 זוגיים לבישת כובע אדום מיוצגת על-ידי מצב אחד ובזמנים אי-זוגיים ע"י מצב אחר. למצבים
 אלה יש אותה הסתברות סטציונרית.

שלומי