

אוניברסיטת תל אביב, הפקולטה למדעים מדויקים, ביה"ס למדעי המתמטיקה.

6.10.95

בחינה ב"מבוא להסתברות", סמסטר קייץ 1995.
המדצה: פרופ' יצחק מלכסון.

מותר להשתמש במחשבון ובחומר כתוב, אך לא בחומר מודפס.
משקל כל שאלה הוא 20 נקודות. S נקודות מקנות ציון $(S+2 \min(S,90))/3$.

1. חשב את סיכוי הזכיה במשחק Craps. הנה כללי המשחק:
מטילים שתי קוביות הוגנות. יהי T סכום שתי התוצאות.
אם T הוא 2, 3 או 12 - המהמר מפסיד. אם הוא 7 או 11 - המהמר זוכה.
אחרת, שתי הקוביות מוטלות שוב ושוב, עד שלראשונה סכום שתי התוצאות הוא 7
(אז המהמר זוכה) או שווה ל- T (אז הוא מפסיד).

2. א. כד מכיל n כדורים לבנים ו- m כדורים שחורים. כדורים נדגמים מן הכד
באקראי וללא החזרה, עד שלראשונה נותרים בכד כדורים בצבע אחד בלבד. הוכח
שהסיכוי לכך שנותרים כדורים לבנים בלבד הוא $n/(n+m)$.
ב. תהי Q_n ההסתברות לכך שלא יהיו שלושה H עוקבים ב- n הטלות מטבע תקין.
מצא נוסחת נסיגה ל- Q_n וחשב את Q_8 .

3. יהי (X_1, X_2, \dots, X_N) סידור אקראי של המספרים $1, 2, \dots, N$ כך שלכל $N!$
הסידורים סיכויים שווים. נגיד שחל ערך שפל ברכיב n (בין 1 ו- N) אם אין $n < i$
עבורו $X_n > X_i$. יהי Z מספר ערכי השפל הכולל.
א. מה הסיכוי לכך שחל שפל ברכיב n ?
ב. עבור $n < m$, מה ההסתברות המותנית שיש שפל ברכיב n בהנתן שאין שפל
ברכיב m ?
ג. חשב את התוחלת והשונות של Z .

4. יהיו X_1, X_2, X_3, X_4 תוצאות דגימה אקראית ללא החזרה של ארבעה מספרים
מתוך $\{1, 2, \dots, N\}$, כש- $N > 4$.
א. חשב את ההסתברות לכך ש- $\max(X_1, X_2) > \min(X_3, X_4)$.
ב. חשב את השונות של $(X_1 + X_2)/2 - (X_3 + X_4)/2$.
ג. הראה שהשונות של $X_1 + X_2 + X_3 - X_4$ שווה לזו שהיתה מתקבלת בדגימה עם
החזרה ומצא (עבור N גדול מספיק) סכום אחר מאותה צורה
 $X_1 + \dots + X_m - X_{m+1} - \dots - X_n$ בעל תכונה זו.

5. יהיו A, B, C מאורעות. הוכח או הפוך על ידי דוגמא:
 א. אם A ו-B בלתי תלויים, אז הם בלתי תלויים בהנתן המאורע C.
 ב. אם A ו-B בלתי תלויים בהנתן C, אז הם בלתי תלויים.
 ג. אם A ו-B ב"ת, A ו-C ב"ת, B ו-C ב"ת, אז A ו-B ו-C ב"ת, או שלושת המאורעות A, B ו-C ב"ת.

6. יהיו $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ בלתי תלויים ושווי התפלגות משותפת (דו-מימדית) עם

$$E(X_i) = 1, E(Y_i) = 2, \text{Var}(X_i) = 4, \text{Var}(Y_i) = 9, \text{Cov}(X_i, Y_i) = 3$$

- א. חשב את מקדם המזואם בין $\sum_{i=1}^n X_i$ ו- $\sum_{i=1}^n Y_i$.
 ב. תן חסם מלעיל קטן כפי שתוכל להסתברות $P(\sum_{i=1}^{700} X_i < \sum_{i=1}^{700} Y_i - 1000)$.
 ג. תן דוגמא להתפלגות משותפת עם תוחלות, שוניות ושונות משותפת כפי שנתונות בניסוח הבעיה.

בהצלחה

פתרון הקורס

1. גזע אלז של האלות יתקף סוס א בהסתברות $\frac{6-k}{36}$ עבור $2 \leq k \leq 6$ יש חמישה מקרים בהם תפוס הכניסה מ'צ'ית קמטק. מקרים האחרים נחמין עז שמתקדם תזלוג 7 (זה קורה גזע האלות קמט' $\frac{6}{36}$) או שמתקדם תזלוג א שהתקדם קמט'ה. גזע האלות האסן שזו הסוס הא 7 או א, הסוס שהסוס הא 7 הא $\frac{6}{6+(6-7+4)}$. גמק והס סגוי הנכון פיו:
 $\frac{1}{36} \cdot 0 + \frac{2}{36} \cdot 0 + \frac{3}{36} \cdot \frac{6}{6+3} + \frac{4}{36} \cdot \frac{6}{6+4} + \frac{5}{36} \cdot \frac{6}{6+5} + \frac{6}{36} \cdot 1 + \frac{6}{36} \cdot \frac{6}{6+5} + \frac{4}{36} \cdot \frac{6}{6+4} + \frac{3}{36} \cdot \frac{6}{6+3} + \frac{2}{36} \cdot 1 + \frac{1}{36} \cdot 0 \approx 0.618$

2. א. האלות ערה אמאורע שהחזות של הכנרים, האחרון לכן. האחרון לכן גמט' $\frac{n}{n+m}$.

? $Q_n = 1 - Q_n$, קהינתן שהאסן T הא Q_{n-1} קהינתן שהאסן H והפני T
 אס הא Q_{n-2} , קהינתן שהאסן והפני הא H והפני T הא Q_{n-3} ואם
 שבת האסנים הא H אס יש כר הנס מתאם,

$$1 - Q_n = \frac{1}{2} (1 - Q_{n-1}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - Q_{n-2}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (1 - Q_{n-3}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots$$

$$\implies Q_n = \frac{1}{2} \cdot Q_{n-1} + \frac{1}{4} \cdot Q_{n-2} + \frac{1}{8} \cdot Q_{n-3}, \quad Q_0 = Q_1 = Q_2 = 1, \quad Q_3 = \frac{7}{8}$$

$$Q_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{13}{16} \quad \dots \quad Q_8 = \frac{149}{256}$$

3. א. התפלגות הפסקה של הפסקה ב-ח שווה להתפלגות של ריבוע ו': $h < i$. ג. זיקה אחרת נכון
 ב. הפלגות: הפסקה ב-ח היא שלם לרשת וטו' הבורה הפונקציה נכון $[i: i]$ עם הפונקציות
 נכונה $\frac{1}{h}$.

ג. $Z = \sum_{i=1}^N Z_i$ כאשר Z_i היא האינדקסור עם שכיחות i שלם. תוחמת סכום שווה
 תנאי סכום התפלגות עם תוחמת מספר עזרי הפסקה היא $\sum_{i=1}^N \frac{1}{h}$.
 הפלגות שכיחה ח שלם לרשת וטו' ולכן גם לרשת וטו' עם הפלגות שכיחה ו':
 $h \neq i$ ח שלם עקב שלם. עם שנות סכום האינדקסורים שווה לסכום הפונקציות שלהם:
 $\sum_{i=1}^N \frac{1}{h} (1 - \frac{1}{h})$.

4. א. הנשלים של הפלגות נכון אחרת הפונקציות שכיחה הפונקציות הם X_1 ו X_2 ולכן
 יש הפונקציות $\frac{1}{6} = \frac{1}{(2)}$, עם הפלגות הפונקציות יש הפונקציות $\frac{5}{6}$.

$$\text{Var}\left(\frac{(X_1+X_2)}{2} - \frac{(X_3+X_4)}{2}\right) = \frac{1}{4} \cdot \text{Var}(X_1+X_2 - X_3 - X_4) = \frac{1}{4} \cdot \text{Var}(X_1 - X_3 + X_2 - X_4)$$

$$= \frac{1}{4} (4 \cdot \text{Var}(X_1) - 8 \cdot \text{Cov}(X_1, X_2) + 4 \cdot \text{Cov}(X_1, X_2)) = \text{Var}(X_1) - \text{Cov}(X_1, X_2)$$

* מכיון שהתפלגות והתפלגות הפונקציות של X_i שוות
 מכיון ש X_1 מתפלגת אחרת כפי
 קבוצה של N מספרים לכל הפונקציות:

$$\text{Var}(X_1) = \frac{(N-1+1)^2 - 1}{12} = \frac{N^2 - 1}{12}$$

$$0 = \text{Var}\left(\frac{N(N+1)}{2}\right) = \text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_N) = N \cdot \text{Var}(X_1) + N(N-1) \cdot \text{Cov}(X_1, X_2) \implies \text{Cov}(X_1, X_2) = -\frac{\text{Var}(X_1)}{N-1}$$

$$= \frac{-\frac{N^2-1}{12}}{N-1} = -\frac{N^2-1}{12(N-1)} = -\frac{N+1}{12} \implies \text{Var}(X_1) - \text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{N^2-1}{12} + \frac{N+1}{12} = \frac{N(N+1)}{12}$$

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + X_3 - X_4) = 4 \cdot \text{Var}(X_1) - 6 \cdot \text{Cov}(X_1, X_2) + 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \text{Cov}(X_1, X_2) = 4 \cdot \text{Var}(X_1)$$

כאשר מניחים צימוד עם הפונקציות של 4 מספרים יש לנו 4 הפונקציות לרשת וטו' ולכן
 לרשת וטו' והפונקציות שוות שווה לסכום הפונקציות $4 \cdot \text{Var}(X_1)$. זיקה שכיחה ו':

$$m(h-m) = 0.25 \cdot h(h-1) \implies 4 \cdot m^2 - 4 \cdot h \cdot m + (h^2 - h) = 0 \implies$$

$$m = \frac{4h + \sqrt{16h^2 - 16h^2 + 16h}}{8} = \frac{4h + \sqrt{16h}}{8}$$

עזר עם א טרם אפשר עזר $h = 8^{2k}$! $m = 4 \cdot 8^{2k-1} + 4 \cdot 8^k$

5. א. צימוד מהפונקציות נשלים של הפונקציות הפונקציות. A - הפסקה "ע", B - הפסקה "ע"
 C - זיקה אחרת מהפונקציות היא "ע".

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) \implies B \perp A$$

$$P(A \cap B | C) = 0 \neq P(A|C) \cdot P(B|C) \implies C$$

שלם

? צומת מפרסמו חוקרים בקב"ש שמה בין מטרת שתיצמנה "פלי" עדין מטרת
 ערכו 0.5 מטרה "ע" ורכבו 0.5 מטרה "פלי", מטילים זאת המטרת הנור
 פתגים . C נקודת המטרת המלון A, הפהלה המלונה הפיל "ע" , B- המטרה
 $P(A \cap B) = 0.5 \cdot 0.0 + 0.5 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} =$ הפהלה הפיל "ע"
 $= (0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.5) \cdot (0.5 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0.5) = P(A) \cdot P(B) \implies B \perp A$
 קהנתן C הפיל להפיל תלמים $P(A \cap B | C) = 0 = P(A | C) \cdot P(B | C) \implies$

, קהנתן קדונה הפלוגה הפיל תלמים הפהלה הפלונה נטרה
 $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap (B \cup C)) = P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap (B \cup C)) =$
 $= P(A) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(C) - P(A) \cdot P(B \cup C) =$
 $= P(A) \cdot [P(B) + P(C) - P(B \cup C)] = P(A) \cdot P(B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$

6. א. $\rho \left(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n Y_i \right) = \frac{\text{cov}(\sum X_i, \sum Y_i)}{\sqrt{\text{Var}(\sum X_i) \text{Var}(\sum Y_i)}} = \frac{n \cdot 3}{\sqrt{14 \cdot 9}} = \frac{1}{2}$

* משתנים קב"ש אינכם שונה הפיל להפיל תלמים ולכן הפיל להפיל תלמים
 $P(\sum X_i < \sum Y_i - 1,000) = P(\sum (Y_i - X_i) > 1,000) =$
 $= P\left(\frac{\sum (Y_i - X_i) - 700(2-1)}{\sqrt{\text{Var}(\sum (Y_i - X_i))}} > \frac{1,000 - 700(2-1)}{300} \right) <$
 $\frac{I}{300} \frac{II}{300} = \frac{700(9+4-2 \cdot 3)}{300^2} = \frac{4,900}{300^2} \approx 0.054$

I. א' שיוון נבינה כאשר הפיל תלמים סתירה להפיל תלמים סגור הפלוגה
 הפיל תלמים סתירה ? II. X מטרה הפיל תלמים הפיל תלמים סגור הפלוגה
 $P(X_1 = -1) = P(X_1 = 3) = P(Y_1 = -1) = P(Y_1 = 5) = 0.5$

הפלוגה כ' הפיל תלמים
 $\begin{cases} P(X_1 = -1, Y_1 = -1) = P(X_1 = 3, Y_1 = 5) = a \\ P(X_1 = -1, Y_1 = 5) = P(X_1 = 3, Y_1 = -1) = 0.5 - a \end{cases}$
 $3 = \text{cov}(X_1, Y_1) = a \cdot (-1) \cdot (-1) + a \cdot 3 \cdot 5 + (0.5 - a) \cdot (-1) \cdot 5 +$
 $+ (0.5 - a) \cdot 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \implies a = \frac{3}{8}$