

## בחינה במבוא להסתברות - סמסטר א', מועד ב'

4.8.2016

מרצה: פרופ' אסף נחמיאס

- משך הבחינה הוא שלוש שעות.
- מותר להשתמש בשלושה דפי סיכום כתובים או מודפסים (דו צדדים) ובמחשבון ללא יכולת תכנות, ציור גרפים או תקשורת.
- השאלון מורכב מ- 15 שאלות רבות ברירה. על כל תשובה נכונה יינתנו 7 נקודות.
- יש לסמן את התשובות בטופס המצורף בלבד! מותר לסמן לכל היותר תשובה אחת לכל שאלה.
- ישנן סה"כ 105 נקודות בבחינה. אם צברת S נקודות ציוןך הוא המינימום בין S לבין 100.
- בהצלחה!

### סוגיה ראשונה

מחמוד מטיל מטבע הוגן שוב ושוב עד שמתקבל "עץ". נסמן את מספר ההטלות של מחמוד ב- $X$ . אלון מטיל מטבע הוגן שוב ושוב עד שמתקבל "פלי". נסמן את מספר ההטלות של אלון ב- $Y$ . נניח כי  $X$  ו- $Y$  בלתי תלויים. מחמוד ואלון מכינים טבלה עם  $Y$  שורות ו- $X$  עמודות. עבור כל תא בטבלה מטיל מחמוד מטבע הוגן ואלון רושם באותו התא את תוצאת ההטלה ("עץ" או "פלי"). נסמן את מספר התאים בהם רושם "עץ" ב- $H$  ואת מספר התאים בהם רושם "פלי" ב- $T$ .

1. מה ההסתברות שכמות התאים בטבלה זוגית?

(א)  $\frac{4}{9}$ .

(ב)  $\frac{1}{2}$ .

(ג)  $\frac{5}{9}$ .

(ד) אף אחת מהנ"ל

2. נסמן  $p = \Pr(H > T | X = 3)$ . אילו מהטענות הבאות נכונות?

(א)  $p < \frac{1}{3}$ .

(ב)  $\frac{1}{3} \leq p < \frac{1}{2}$ .

(ג)  $\frac{1}{2} \leq p < \frac{2}{3}$ .

(ד)  $\frac{2}{3} \leq p$ .

3. מה התוחלת  $E(H)$ ?

(א) 2.

(ב) 3.

(ג) 4.

(ד) אף אחת מהנ"ל

4. מהי השונות המשותפת  $Cov(H, XY)$ ?

(א) 6.

(ב) 8.

(ג) 10.

(ד) אף אחת מהנ"ל

## סוגיה שנייה

על השולחן מטבע הוגן ושני כדים. הכדים מסומנים בא' וב' ובהם מפוזרים שלושה כדורים. בכל תור שירה בוחרת כד באקראי. אם בכד שבחרה יש שניים או שלושה כדורים, היא מעבירה אחד מהם לכד השני והתור מסתיים. אם בכד שבחרה אין כדורים, היא אינה עושה דבר והתור מסתיים. אם בכד שבחרה יש כדור אחד, היא ראשית מטילה את המטבע הוגן; אם יצא לה "פלי", היא מעבירה את הכדור לכד השני, ואם יצא לה "עץ" היא משאירה את הכדור במקומו; והתור מסתיים. בהתחלה כל שלושת הכדורים נמצאים בכד א'.

5. יהי  $X$  מספר התורות שתמתין שירה עד אשר יהיו בכד א' **שוב** שלושה כדורים. למשל, אם בתור הראשון בחרה שירה בכד ב' הריק, אז  $X = 1$ . מהי תוחלת  $X$ ?

(א) 3

(ב) 6

(ג) 7

(ד) אף אחת מהנ"ל

6. מהי תוחלת מספר התורות שתמתין שירה עד אשר בכד א' לא יהיו כדורים כלל?

(א) 6

(ב) 10

(ג) 13

(ד) 15

7. מה נכון לגבי ההסתברות שבסיבוב ה- $n$  יש בכד א' בדיוק שני כדורים כאשר  $n$  שואף לאינסוף?

(א) שואפת ל- $\frac{1}{3}$

(ב) שואפת ל- $\frac{1}{2}$

(ג) שואפת ל- $\frac{2}{3}$

(ד) אף אחת מהנ"ל

8. בלי ששירה תשים לב, נוכל מחליף את המטבע ההוגן במטבע שבאורח קסם תמיד נופל על "עץ". מה נכון עתה לגבי ההסתברות שבסיבוב ה- $n$  יש בכד א' בדיוק שני כדורים כאשר  $n$  שואף לאינסוף?

(א) שואפת ל- $\frac{1}{3}$

(ב) שואפת ל- $\frac{1}{2}$

(ג) שואפת ל- $\frac{2}{3}$

(ד) אף אחת מהנ"ל

### סוגיה שלישית

לקוחה מזמינה  $N$  רכיבים ממפעל. נתון ש-  $N$  מתפלג אחיד על הקבוצה  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . משך העבודה של כל רכיב מתפלג באופן הבא: הרכיב עובד תמיד ביום הראשון. בסוף יום  $i$ , עבור  $i = 1, 2$ , הרכיב מתקלקל בסיכוי  $\frac{1}{3}$  ובסיכוי  $\frac{2}{3}$  הוא נשאר תקין וממשיך ליום הבא. בסוף היום השלישי הרכיב יוצא מכלל שימוש בהסתברות 1. נסמן ב-  $X_1, X_2, \dots, X_N$  את מספר הימים בהם פעלו הרכיבים. נניח כי כל המשתנים המקריים  $N, X_1, \dots, X_N$  בלתי תלויים.

9. מהי  $\mathbb{E}[X_1 + \dots + X_N]$  ?

(א)  $\frac{19}{9}$

(ב)  $\frac{19}{3}$

(ג) 7

(ד) 8

10. מהו  $\mathbb{P}[X_1 + \dots + X_N \geq 3]$  ?

(א) 1

(ב)  $\frac{8}{9}$

(ג)  $\frac{7}{9}$

(ד)  $\frac{13}{15}$

לקוחה אחרת של המפעל הזמינה 81 רכיבים כאלו. נסמן ב-  $Y_1, \dots, Y_{81}$  את משך הזמן בימים שעבד כל רכיב. נניח שהמשתנים  $Y_1, \dots, Y_{81}$  בלתי תלויים.

11. בעזרת אי־שוויון צ'בישב, מה ניתן להגיד על ההסתברות

$$\mathbb{P}[161 \leq Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{81} \leq 181]$$

(א) גדולה מ- 0.35

(ב) גדולה מ- 0.9

(ג) קטנה מ- 0.35

(ד) אף אחת מהנ"ל

12. בעזרת משפט הגבול המרכזי, מה ניתן להגיד על ההסתברות

$$\mathbb{P}[161 \leq Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{81} \leq 181]$$

(א) בין 0.75 ל- 0.85

(ב) בין 0.85 ל- 0.95

(ג) גדול מ- 0.95

(ד) אף אחת מהנ"ל

### סוגיה רביעית

יהי  $X$  משתנה מקרי פואסוני עם תוחלת 100. בגן אורי יש  $X$  ילדים. ביום מסויים הוחלט לחלק את הילדים לשתי קבוצות - קבוצת "עץ" וקבוצת "פלי". לצורך כך הטיל אורי הגן מטבע הוגן עבור כל ילד, באופן בלתי תלוי, כדי לקבוע את שיוכו. נסמן ב-  $Z_T$  ו-  $Z_P$  את מספר הילדים בקבוצת "עץ" וקבוצת "פלי" בהתאמה.

13. ההתפלגות של  $Z_T$  היא

- (א) אחידה
- (ב) גאומטרית
- (ג) בינומית
- (ד) אף אחת מהנ"ל

14. בהינתן  $X$  ההתפלגות המותנה של  $Z_T$  היא

- (א) אחידה
- (ב) גאומטרית
- (ג) בינומית
- (ד) אף אחת מהנ"ל

15. מהי  $\mathbb{E}[Z_T | Z_P \geq 10]$ ?

- (א) 40
- (ב) 45
- (ג) 50
- (ד) אף אחת מהנ"ל

## Tables of the Normal Distribution



### Probability Content from $-\infty$ to $Z$

| z   | 0.00   | 0.01   | 0.02   | 0.03   | 0.04   | 0.05   | 0.06   | 0.07   | 0.08   | 0.09   |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |
| 3.0 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9987 | 0.9988 | 0.9988 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9989 | 0.9990 | 0.9990 |