

פתרון מקוצר לבחינה של פרופ' אסף נחמיאס מ 04/02/16

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|-------|
| 15 | 14 | 13 | 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | שאלה |
| ג | א | ד | ב | ג | ד | ג | ב | ב | ב | ד | ב | ג | א | ד | תשובה |

הסברים קצרים

שאלה 1

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - 0.5\right| \geq 0.1\right) \leq \frac{V\left(\frac{X}{n}\right)}{0.1^2}$$

$$V\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2} n \cdot 0.5 \cdot 0.5$$

שאלה 2

$$P\left(\left|\frac{X}{400} - 0.5\right| \geq 0.1\right) = 2P\left(\frac{X}{400} - 0.5 \geq 0.1\right) \cong 2 \left[1 - \phi\left(\frac{0.1}{\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{400}}}\right) \right]$$

שאלה 3

$$\cong 2 \left[1 - \phi\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}}}\right) \right]$$

שאלה 4

הקלף 1 יעבור למקום התחתון ברגע שהוא והתחתון יבחרו. בכל שלב זה קורה בסיכוי $\frac{1}{3}$

באופן בלתי תלוי בעבר. לכן מספר השלבים עד שזה יקרה מתפלג $G\left(\frac{1}{3}\right)$.

שאלה 5

רק על-ידי ביצוע מספר זוגי של פעולות, ניתן לחזור למצב המקורי. השרשרת היא מחזורית.

שאלה 6

כעת יש מחלקה בלתי פריקה ולא מחזורית בעלת שלושה מצבים שווי הסתברות סטציונרית.

שאלה 7

קלף 4 תמיד נשאר במקומו. יש מחלקה בת 6 מצבים בעלי אותה הסתברות סטציונרית. המחלקה היא לא מחזורית, כי ניתן למשל להישאר באותו מצב שני צעדים רצופים על-ידי בחירת 4.

שאלה 8

$$P(W_2 - W_1 = 1 | W_3 = 1) = \frac{P(W_2 - W_1 = 1, W_3 = 1)}{P(W_3 = 1)} =$$

$$= \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{8}}{\frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{8} + \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{8} + \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{8}}$$

שאלה 9

יהיו Z_i אינדיקטור לכדור לבן בשלב i .

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_1, W_2) &= \text{Cov}(2 + Z_1, 2 + Z_1 + Z_2) = \\ &= \text{Cov}(Z_1, Z_1) + \text{Cov}(Z_1, Z_2) = V(Z_1) + \text{Cov}(Z_1, Z_2) \\ V(Z_1) &= \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Cov}(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) - E(Z_1)E(Z_2) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} - \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6}$$

שאלה 10

$$\begin{aligned} V((W_k - B_k) - (W_{k-1} - B_{k-1})) &= V((W_k - W_{k-1}) - (B_k - B_{k-1})) = \\ &= V(W_k - W_{k-1}) + V(B_k - B_{k-1}) - 2\text{Cov}(W_k - W_{k-1}, B_k - B_{k-1}) \\ V(W_k - W_{k-1}) &= V(B_k - B_{k-1}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_k - W_{k-1}, B_k - B_{k-1}) &= \\ &= E((W_k - W_{k-1})(B_k - B_{k-1})) - E(W_k - W_{k-1})E(B_k - B_{k-1}) = 0 - \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \end{aligned}$$

שאלה 11

הסיכוי שבפעם ה- k נוציא לראשונה כדור אדום הוא

$$\frac{4}{6} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{6}{8} \cdots \frac{2}{6+(k-1)}$$

נסתכל על מכפלת האיברים חוץ מהאיבר האחרון שבמכפלה.

מכפלת האיברים שבמקומות האי זוגיים מתנהגת כמו $\frac{1}{k}$.

מכפלת האיברים שבמקומות הזוגיים מתנהגת כמו $\frac{1}{k}$.

האיבר האחרון מתנהג כמו $\frac{1}{k}$.

מתקיים $\sum \frac{1}{k^3} k^2 = \infty$ ו $\sum \frac{1}{k^3} k < \infty$.

שאלה 12

S_n מתנהג בקירוב נורמלית עם תוחלת n .

שאלה 13

דרוש שבהתחלה נקבל את הערך 0 או 1.

שאלה 14

אם בשלב הראשון שבו התקיים $(X_i > 0)$, התקבל $(X_i > 1)$ אז מתקיים $(N_1 = N_0)$.
אחרת, אם התקבל $(X_i = 1)$, אז נחכה לאירוע. בכל שלב, הסיכוי שיהיה אירוע הוא $1 - e^{-1}$.

הזמן עד שיהיה אירוע מתפלג גיאומטרית והוא בעל תוחלת $\frac{1}{1 - e^{-1}}$.

בהינתן שהתקיים $(X_i > 0)$, הסיכוי שהתקיים $(X_i = 1)$ היא $\frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}}$.

כאמור, רק במקרה זה, יהיה לנו זמן ציפיה נוסף.

שאלה 15

שקול ל $(N_k \geq 2k)$, שאומר שב $2k - 1$ התחנות הראשונות היו פחות מ k

נוסעים. מספר הנוסעים ב $2k - 1$ תחנות מתפלג בקירוב נורמלית עם תוחלת $2k - 1$ וסטיית תקן $\sqrt{2k - 1}$.

שלומי