

בתרון הבחינה של בוב זירמן 1/10/04

הבחינה נמצאת קאת de בוב זירמן
<http://www.math.tau.ac.il/~tsirel>

1. תבן $\{X_i\}$ סדרת תוצאות בדיקות $X = \sum_{i=1}^k X_i$

$$E(X) = E\left(\sum X_i\right) = k \cdot E(X_1) = k \cdot p$$

$$V(X) = V\left(\sum X_i\right) = \left(\sum V(X_i)\right) + \sum_{i \neq j} \text{cov}(X_i, X_j)$$

$$\sum V(X_i) = k \cdot p \cdot q$$

$$\sum_{i \neq j} \text{cov}(X_i, X_j) = k(k-1) \cdot \text{cov}(X_1, X_2)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i \neq j} \text{cov}(X_1, X_2) &= E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2) = \\ &= p \cdot \left(\begin{matrix} \text{הסתברות} \\ \text{הבחינה} \\ \text{אולם} \end{matrix} \right) \cdot p(X_1=1) + p \cdot \left(\begin{matrix} \text{הסתברות} \\ \text{הבחינה} \\ \text{אולם} \end{matrix} \right) \cdot p^2(X_1=1) \end{aligned}$$

$$- E(X_1) \cdot E(X_2) = \frac{1}{n} \cdot p + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot p^2 - p^2 = \frac{1}{n} (p - p^2)$$

$$\sum \text{cov}(X_i, X_j) = \frac{k(k-1)}{n} (p - p^2) \quad \text{כאן}$$

$$V(X) = k \cdot p \cdot q + \frac{k(k-1)}{n} (p - p^2) > k \cdot p \cdot q$$

עבור X_i ו- X_j שונים, $0 < p < 1$ (עבור $j \neq i$)
כי יתכן שנגזם אולם מוצר

$$\lim_{h \rightarrow \infty} k \cdot p \cdot q + \frac{k(k-1)}{n} (p - p^2) = k \cdot p \cdot q \quad .2$$

(ההסתברות של h מוצר נצטק יותר מנגזם אולם)
שלמה אולם כאשר $h \rightarrow \infty$ ושלם יש אולם אולם
de התבטלות ג'ומית.

3. $X+Y$ היא סדרה de $2k$ תוצאות $2k$ בדיקות

$$V(X+Y) = 2k \cdot p \cdot q + \frac{2k(2k-1)}{n} (p - p^2)$$
$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y) \implies$$
$$\text{cov}(X, Y) = \frac{V(X+Y) - V(X) - V(Y)}{2} =$$

$$= \left(2k \cdot p \cdot q + \frac{2k(2k-1)}{n} (p-p^2) - 2k \cdot p \cdot q - 2 \cdot \frac{k(k-1)}{n} (p-p^2) \right) / 2 =$$

$$= \frac{k^2}{n} \cdot p \cdot q$$

$$r(x, t) = \frac{\text{cov}(x, t)}{\sqrt{V(x) \cdot V(t)}} = \frac{\frac{k^2}{n} \cdot p \cdot q}{k \cdot p \cdot q + \frac{k(k-1)}{n} (p-p^2)} = \quad .4$$

$$= \frac{\frac{k^2}{n} \cdot p \cdot q}{k \cdot p \cdot q + \frac{k(k-1)}{n} \cdot q} = \frac{k}{n+k-1}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{n+k-1} = 1 \quad .6 \quad \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{k}{h+k-1} = 0 \quad .5$$

7. הסביו שרון יקדם את המכתב המיועד לו בוא $\frac{1}{100}$.

8. גיוש שרון יקדם את המכתב של אחר ואלו אחר יקדם את המכתב של רון. נסתכל עם המאונץ כגם אלוז

של 99 מאונצות זבלים שכל אחד מהם מציין בהספד קין המכתבים של רון ושל משפו אחר. קביעת שרון יקדם

מכתב של משפו אחר, אך הסביו של אלוט אחר יקדם את המכתב של רון בוא $\frac{1}{99}$. לכן, $\frac{1}{99} \cdot \frac{1}{100} = \frac{1}{9900} = p$

9. ככל ש-N יקדם את בעק, א, זכך שרון יקדם את של משפו אחר, שאול אחר יקדם את של אחר ושל של אחר תמשק על שג'ע עם א בראים. הברט ה-A זכך יקדם את המכתב של רון.

$$\left(\prod_{i=1}^k \frac{100-i}{100-i+1} \right) \cdot \frac{1}{100-k} = \frac{1}{100} \implies N \sim U(1, 100)$$

10. קביעת שפשיט שדה משתפל רון בוא דעלת אלק 30, אך

למרו 70 בראים שלפיו יש 70 פראטציות שולת הסתברות שלפוקה, אם בזכך של פאלה הקצות, בארי מסר הברט בוא 70, הברטלאת בוא $U(1, 70)$.

11. הפינתרות "עבוס" עם אחז 3 משני ימים מתאמים ביאל $\frac{2}{365}$

$$E(X) = \left(\frac{(99+1)99}{2} + \frac{(264+1)264}{2} \right) / 365 \approx 109.4$$

12. $E(X) = 109.4$

13. $0.5 \cdot 99 + 0.5 \cdot 264 = 181.5$

14. $E(X/A) = \left(0 + \frac{(98+1)98}{2} + 0 + \frac{(263+1)263}{2} \right) / 363 = 109$

או עי תלום פערק מהביאוי: $E(X/\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) + E(X/A) \cdot P(A) = E(X)$

15. אם יבוצע עג א ימים יש יום הולדת אכ הפכו הווא $\frac{k}{365}$

16. מהקשת הפינתרות של המשלים של המאוכז שלאל אחז על פיה יום הולדת איתמוס: $1 - \left(\frac{364}{365}\right)^5$

17. יש יום הולדת בעם אחת קשרה לשני קני המשפחה לכן מסבר קני המשפחה כזר על מעין. וההבטאת פיא אחזה קין ס ע 364 ויש לה תוחמת 182

18. איתמוס פיה יום הולדת אחז 37'וק. הפמן עז יום הולדת פיא מתבטא אחז קין ס ע 363 והוא דעם תוחמת 181.5

19. $P(k=1 / N=2, A) = \frac{P(k=1, A / N=2)}{P(A / N=2)} = \frac{\frac{1}{365} \cdot \frac{1}{365}}{1 - \left(\frac{364}{365}\right)^2} = \frac{1}{365 - 364^2} = \frac{1}{729}$

20. קפינתרות $\frac{1}{729}$ פיה יום הולדת לשני קני המשפחה איתמוס

ואכ נחב 364 ימים קמס' המשלים זמן קבכה מתבטא אחז קין ס ע 363, כאר פערק ס מתקום אל פיום יש

יום הולדת ואתרר מתקום פערקת פאקום קמז וז:

$$E(X / N=2, A) = \frac{1}{729} \cdot 364 + \left(1 - \frac{1}{729}\right) \cdot \frac{0+363}{2} \approx 181.8$$

שלמו