שאלה:

מרכיבים מהאותיות א,ב,ג באופן מקרי מילה בת 10 אותיות.

א. מה הסכוי שכל אות תופיע לפחות פעם אחת?

ב. מה הסכוי שכל אות תופיע לפחות פעמיים?

___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

פתרון:

$$\#\Omega = |\Omega| = 3^{10}$$

א. $|A| = 3^{10} - 3\cdot 2^{10} + 3$ (מוסיפים מקרים שהוחסרו פעמיים. אלה המקרים ששתי ספרות חסרות)

$$p = |A| / |\Omega|$$

ב. דרך ראשונה:

$$|B| = 3^{10} - 3\cdot 2^{10} + 3 - 3\cdot 10\cdot 2^{9} + 3\cdot 10\cdot 2 + 3\cdot 10\cdot 9$$

ללא הגבלה | ללא ספרה מסוימת | ללא שתי ספרות | ספרה אחת פעם אחת | ספרה אחת פעם אחת אחרת כלום | שתי ספרות פעם אחת

דרך שניה:

a	b	c	מספר מצבים מסוג זה
6	2	2	3
5	3	2	6
4	3	3	3
4	4	2	3

$$|B| = 3\cdot\binom{10}{6}\cdot\binom{4}{2} + 6\binom{10}{5}\cdot\binom{5}{3} + 3\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{3} + 3\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{6}{4}$$

$$p = |B| / |\Omega|$$

הערה: התשובה $\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot 3^{4}$ אינה נכונה מכיון שבדרך זאת נספרים מצבים יותר מפעם אחת. אפשר לדוגמא להבטיח את קיומם של a במקומות ראשון ושני ואחר כך לקבל a במקומות שלישי ורביעי, אותו מצב נספר גם כשהבטחנו את קיומם של a במקומות שלישי ורביעי, ואם אחר כך קבלנו a גם במקומות ראשון שני.

שאלה: הוכח את הזהות הקומבינטורית: $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\cdot\binom{n}{k} = n(n-1)\cdot 2^{n-2}$

פתרון בדרך הישנה:

$$n(n-1)\cdot 2^{n-2} = n(n-1)\cdot(1+1)^{n-2} = n(n-1)\cdot\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} =$$

$$= n\cdot(n-1)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n-2}{k-2} = \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\cdot\frac{(n-2)!}{(n-k)!\cdot(k-2)!} =$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\cdot\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\cdot\binom{n}{k}$$

פתרון בדרך שניה:

שני האגפים מתארים בחירת ועד בו יש שני תפקידים של יושב-ראש וגזבר וקבוצה כלשהי של חברים, כך שלגבי כל פרט מחליטים אם להכניסו לוועד.

שאלה: בלוח משבצות יש n שורות ו- n טורים, סך הכל n^2 משבצות. בוחרים n מהן באופן מקרי. מה ההסתברות שתבחרנה: א. כולן בשורה אחת. ב. כולן בטור אחד. ג. אחת בכל שורה ואחת בכל עמודה.

פתרון:

$|\Omega| = \#\Omega = \binom{n^2}{n}$ $\quad |A|=|B|=n$ $\quad |C|=n!$

שאלה: מתוך n זוגות נעליים בוחרים באופן מקרי $2r$ נעליים בודדות $(2r<n)$.

א. מה ההסתברות שאין אף זוג שלם ביניהם? ב. מה ההסתברות שיהיו בדיוק זוג שלם אחד? ג. מה ההסתברות שיהיו בדיוק 2 זוגות? ד. מה ההסתברות שיהיו r זוגות שלמים?

פתרון:

$|\Omega| = \binom{2n}{2r}$ $\quad |A| = \binom{n}{2r}\cdot 2^{2r}$ $\quad |B| = \binom{n}{1}\cdot\binom{n-1}{2r-2}\cdot 2^{2r-2}$

$|C| = \binom{n}{2}\cdot\binom{n-2}{2r-4}\cdot 2^{2r-4}$ $\quad |D| = \binom{n}{r}$

הערה: כאן בשאלה זו, עבדנו עם מדגם סדור מסודר.

שלומי

שאלה: תן הוכחה אלגברית וגם הוכחה קומבינטורית לזהויות הבאות:

א. $\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i}$ ב. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

ג. $\frac{1}{2}\binom{n}{1}-\frac{1}{4}\cdot\binom{n}{2}+\frac{1}{8}\binom{n}{3}-\cdots\left(-\frac{1}{2}\right)^n\binom{n}{n}=1-\frac{1}{2^n}$

פתרון:

א. הוכחה ראשונה: בחירת k ילדים מתוך n בנות ו-m בנים כאשר באגף ימין יש חלוקה על-פי מספר הבנות הנבחרות.

הוכחה שניה: באינדוקציה על n על-פי

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot\binom{m}{k-i}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n-1}{i-1}\cdot\binom{m}{k-i}+\sum_{i=0}^{k}\binom{n-1}{i}\cdot\binom{m}{k-i}=\cdots$$

הוכחה שלישית: נסתכל על $(1+a)^{n+m}=(1+a)^n\cdot(1+a)^m$
המקדם של a^k הוא $\binom{n+m}{k}$ והוא גם $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$

ב. הוכחה ראשונה: $2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot1^k\cdot1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

הוכחה שניה: מספר כל תתי קבוצות של קבוצה בגודל n, כאשר באגף שמאל יש חלוקה על-פי גודל תת הקבוצות.

הוכחה שלישית: על-פי אינדוקציה ועל-פי $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}$

ג. הוכחה ראשונה: $1-\frac{1}{2^n}=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^n\overset{\text{על פי בינום}}{=}\cdots$

הוכחה שניה: הסתברות האיחוד של מאורעות $A_1,A_2,\dots A_n$ נתונה על-ידי הנוסחא $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}S_i\cdot(-1)^{i-1}$ כאשר S_i הוא סכום ההסתברויות לחיתוך i מאורעות. יהיו $A_1,A_2,\dots A_n$ מאורעות בלתי תלויים שלכל אחד מהם יש הסתברות 0,5. במקרה זה ההסתברות שאותן i מאורעות מתקיימים היא $0{,}5^i$ ויש בדיוק $\binom{n}{i}$ קבוצות של i מאורעות, מכאן אגף שמאל הוא הסתברות האיחוד. הסתברות האיחוד היא גם המשלים של המאורע שאף מאורע לא קורה.

שלומי

שאלה: $2N$ בנים ו- $2N$ בנות מתחלקים לשתי קבוצות שוות גודל.

א. בכמה חלוקות יש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות?

ב. בכמה חלוקות יש בכל קבוצה מספר שווה של בנים ובנות, אם הקבוצות לאו דווקא שוות גודל?

פתרון:

א. $0.5\cdot\binom{2N}{N}\cdot\binom{2N}{N}$ (להבדיל ? 0.5 אם בחירת קבוצה שקולה לבחירת המשלים שלה)

ב. $$0.5\cdot\sum_{k=0}^{2N}\binom{2N}{k}^2=0.5\cdot\sum_{k=0}^{2N}\binom{2N}{k}\cdot\binom{2N}{2N-k}\overset{*}{=}0.5\cdot\binom{4N}{2N}$$

* מכיון שמדובר במספר האפשרויות לבחור בקבוצה בגודל $2N$ שחלק כלשהו ממנה הוא מקבוצת הבנים והחלק האחר מקבוצת הבנות.

שאלה:

בחדר ילדים 2 מכוניות, 2 בובות ו- 2 כדורים. אברהם, בני וגדי מחלקים ביניהם את הצעצועים באופן מקרי כך שכל אחד מקבל שניים מהצעצועים.

מה ההסתברות: א. שבני יקבל את 2 המכוניות? ב. שבני יקבל צעצועים מאותו הסוג? ג. שכל ילד יקבל צעצועים מסוג אחד לבד?

ד. שלפחות אחד מהילדים יקבל שני צעצועים מאותו סוג?

פתרון:

א. $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$ ב. $\frac{3\cdot\binom{4}{2}}{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}}=0.2$ ג. $\frac{3!}{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}}=\frac{1}{15}$

ד. על-פי הכלה והפרדה $3\cdot\frac{1}{5}-3\cdot\frac{1}{15}+\frac{1}{15}=\frac{7}{15}$

או על-פי חלוקה למקרים: I - שרק אחד יקבל מסוג אחד, II - שכולם יקבלו מסוג אחד

$$\frac{\underset{\text{בחירת הילד}}{3}\cdot\underset{\text{בחירת הצעצוע}}{3}\cdot 2\cdot 2+3!}{\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}}=\frac{7}{15}$$

שאלה: מה צריך להיות אורכה של סדרת הגרלות באופן מקרי עם החזרה מתוך 0-9 כדי שההסתברות להופעת "7" תהיה לפחות 0.9?

פתרון: $1-0.9^n\geq 0.9\Longrightarrow 0.9^n\leq 0.1\Longrightarrow n\cdot\log 0.9\leq\log 0.1$
$\Longrightarrow n\geq 21.85\Longrightarrow n=22$

שלומי

<u>שאלה (מבחינה, סמסטר א' תשנ"ה)</u> מסדרים $n+1$ כדורים ב-n תאים באופן שכל ה-n^{n+1} הסידורים האפשריים הם שווי סיכוי. מה הסיכוי שלא "ישאר" אף תא ריק?

<u>פתרון:</u>

$$\frac{\#A}{\#\Omega}=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{\binom{n+1}{2}\cdot n!}{n^{n+1}}=\frac{(n+1)!}{2\cdot n^{n}}$$

(בוחרים בשני כדורים, מתיחסים אליהם כאל אלמנט אחד ומסדרים את n האלמנטים).

<u>הערות:</u>

א. <u>אסור</u> להגביל את עצמנו למצב שכדור אחד מסוים יכנס לתא שבו כבר אחד מהאחרים, מכיון שאולי זוג אחר נמצאו ביחד באותו התא לחוד.

ב. <u>אסור</u> לבחור בתחילה כדור שיתוסף לאחר לאחר שכל האחרים יכנסו אחד לכל תא, מכיון שכך מצבים יספרו פעמיים. המצב שכדורים א' ו ב' ביחד יספר כאשר א' יתוסף כאחרון ל-ב' וגם כאשר ב' יתוסף כאחרון ל-א'.

<u>שאלה:</u> שני אנשים יוצאים לדו קרב. הכלל הוא שהראשון יורה לעבר השני, אם הוא מחטיא השני יורה, אם הוא מחטיא הראשון יורה שוב וחוזר חלילה. ההסתברות של כל אחד מהם לפגוע בירייה בודדת היא p. מה הסכוי של א' להשאר בחיים? מה הסכוי של ב' להשאר בחיים?

<u>פתרון בדרך הפשוטה:</u>

$$p(\text{א'})=\sum_{k=0}^{\infty} q^{2k}p=p\cdot\sum_{k=0}^{\infty} q^{2k}=\frac{p}{1-q^{2}}=\frac{1}{2-p}$$

$$p(\text{ב'})=\sum_{k=0}^{\infty} q^{2k+1}p=p\cdot\sum_{k=0}^{\infty} q^{2k+1}=\frac{p\cdot q}{1-q^{2}}=\frac{q}{1+q}=1-p(\text{א'})$$

<u>פתרון בדרך שניה:</u> יהי a סכוי הראשון להשאר בחיים.

$$a=p+(1-p)(1-a)\Longrightarrow a=1-qa\Longrightarrow a=\frac{1}{1-q}$$

הסבר: או שהוא פוגע בנסיון הראשון או שהם מחליפים תפקידים.

שלומי

שאלה: מטילים מטבע הוגנת n פעמים, מה ההסתברות שכל ה"פלי" יצאו במקבץ אחד ויחיד (הנחה שגודל המקבץ יכול להיות גם 0)?

פתרון בדרך הראשונה:

בכל הטלה יש סיכוי 0.5 שתצא תוצאה זהה לקודמת ו 0.5 שתתקבל שונה. אם הראשון יהיה עץ נדרוש שיהיו אפס או אחד או שני שינויים.
אם הראשון יהיה פלי נדרוש שיהיו אפס או אחד שינויים.

$$p=0.5\left[0.5^{n-1}+0.5^{n-1}\binom{n-1}{1}+0.5^{n-1}\binom{n-1}{2}\right]+$$

$$+0.5\left[0.5^{n-1}+0.5^{n-1}\binom{n-1}{1}\right]=0.5^{n+1}\left(n^2+n+2\right)$$

פתרון בדרך שניה:

$$|\Omega|=2^n$$

יש n מקבצים אפשריים באורך 1, יש $n-1$ מקבצים אפשריים באורך 2,
באופן כללי יש $n-j+1$ מקבצים אפשריים באורך j עבור $n\geq j\geq 1$.
יש להוסיף גם את המקרה שכל הפעמים יצאו "עץ".

$$|A|=1+\sum_{j=1}^{n}(n-j+1)=1+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n^2+n+2}{2}$$

$$p=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{n^2+n+2}{2^{n+1}}$$

שלומי

שאלה: משחק החנוכה: על שולחן מונחים 4 ארגזים ובהם "דמי חנוכה". הארגז הראשון המסומן ב-"נ" נמצאים 3 מטבעות של 10 ש"ח ו-4 של 1 ש"ח.
בארגז השני המסומן ב-"ג" נמצאים 4 מטבעות של 10 ש"ח ו-3 של 1 ש"ח.
בארגז השלישי המסומן ב-"ה" נמצאים 6 מטבעות של 10 ש"ח ו-2 של 1 ש"ח.
בארגז הרביעי המסומן ב-"פ" נמצאים 6 מטבעות של 10 ש"ח ו-1 של 1 ש"ח.
אתה מסובב סביבון הוגן ובוחר בארגז המסומן באותה האות עליה מונח הסביבון שנעצר. מארגז זה אתה מוציא 3 מטבעות באופן מקרי.
א. מה ההסתברות שיצאו מטבעות משני הסוגים?
ב. אם קיבלת 12 ש"ח, מה ההסתברות שפתחת את הארגז המסומן ב-"נ"?

פתרון:

א.

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{4}{1}+\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}}+\frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}+\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}}+\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{2}{1}+\binom{6}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{8}{3}}+\frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{7}{3}}\right]$$

או

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\binom{7}{3}-\binom{3}{3}-\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}}+\frac{\binom{7}{3}-\binom{4}{3}-\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}}+\frac{\binom{8}{3}-\binom{6}{3}}{\binom{8}{3}}+\frac{\binom{7}{3}-\binom{6}{3}}{\binom{7}{3}}\right]$$

או

$$\frac{1}{4}\left[\left(3\cdot\frac{3\cdot2\cdot4}{7\cdot6\cdot5}+3\cdot\frac{3\cdot4\cdot3}{7\cdot6\cdot5}\right)+\left(3\cdot\frac{4\cdot3\cdot3}{7\cdot6\cdot5}+3\cdot\frac{4\cdot3\cdot2}{7\cdot6\cdot5}\right)+\left(3\cdot\frac{6\cdot5\cdot2}{8\cdot7\cdot6}+3\cdot\frac{6\cdot2\cdot1}{8\cdot7\cdot6}\right)+\left(3\cdot\frac{6\cdot5\cdot1}{7\cdot6\cdot5}\right)\right]=\frac{39}{56}$$

(מכפילים כל איבר ב 3 מכיון שיש בחירה של מיקום השונה).

ב.

$$\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}}}{\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}}+\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}}+\frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{8}{3}}+0\right)}=\frac{8}{15}$$

הערה: מתחילים בבחירת ארגז ולא שלשה. לא לכל שלשה יש אותו סיכוי להישלף, מכיון שיש יותר שלשות באחד הארגזים, הרי שהסיכוי של כל אחת מהן להישלף קטן יותר מאשר של שלשות בארגזים האחרים. מרחב השלשות האפשריות אינו סימטרי.

שלומי

שאלה: בקופסא 4 מטבעות. נסמן ב p_i את ההסתברות ל"עץ" בהטלת המטבע ה-i. נתון $P_1=0,\ P_2=0.25,\ P_3=0.5,\ P_4=0.75$.

א. מטבע נבחר באקראי מתוך הקופסא ומוטל פעם אחת. מה ההסתברות לקבל "עץ" בהטלה זו?

ב. ידוע שהתקבל "עץ" בהטלה הנ"ל. מה ההסתברות שהוטל מטבע מס' 4?

ג. מטילים שוב את אותו מטבע (כאשר ידוע שבהטלה הראשונה התקבל "עץ") מה ההסתברות לקבלת "עץ" בהטלה זו?

פתרון:

א.

$$\frac{1}{4}\left(0+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{8}$$

ב.

$$\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}=0.5$$

ג.

$$\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$+\frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}\cdot\frac{3}{4}=\frac{7}{12}\cong 0.58$$

(התחשבנו בסכויים שמדובר במטבעות השונים לאור נתוננו בהטלה הראשונה. בהטלה השניה לסכם אותן שלא מדובר במטבע שעבורו $p=0$ והיא גם שינתה את היחסים בין הסכויים שמדובר במטבעות השונים, כפי שראינו גם בסעיף הקודם).

או על-ידי אותו חישוב אך בגישה שונה:

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}\cdot 0\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{7}{12}$$

שלומי

שאלה: אדם אוכל סופגניות עד שמוצא סופגניה עם ריבה, אולם הוא לא מסוגל לאכול יותר מ-10 סופגניות. ההסתברות שסופגניה מכילה ריבה היא p והסופגניות בלתי תלויות אחת באחרות. א. מה הסכוי שהאדם יאכל k סופגניות?
ב. מה הסכוי שהאדם יאכל פחות מ-10 סופגניות?

פתרון: א. עבור $1\le k\le 9$: $P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p$; עבור $k>10$: $P(X=k)=0$
$P(X=10)=(1-p)^9$ (אם היו 9 כשלונות הוא בכל מקרה יאכל בדיוק 10 סופגניות).
ב. (אסור שיהיו 9 כשלונות רצופים) $P(X<10)=1-P(X=10)=1-(1-p)^9$

שאלה: כל אחד משני אנשים מטיל n מטבעות הוגנות. א. מה הסכוי שיחד הם קבלו n עצים? ב. אם התקבלו סך הכל n עצים, מה הסכוי שאת כולם קבל האדם הראשון? ג. מה הסכוי ששניהם קבלו אותו מספר עצים?

פתרון: א.
$$\sum_{k=0}^{n}0.5^n\cdot\binom{n}{k}\cdot 0.5^n\cdot\binom{n}{n-k}=0.5^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}=0.5^{2n}\cdot\binom{2n}{n}$$

ב.
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.5^n\cdot 0.5^n}{0.5^{2n}\cdot\binom{2n}{n}}=\frac{1}{\binom{2n}{n}}$$

ג.
$$\sum_{k=0}^{n}0.5^n\cdot\binom{n}{k}\cdot 0.5^n\cdot\binom{n}{k}=0.5^{2n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}=0.5^{2n}\binom{2n}{n}$$

שאלה: הסכוי לפגוע ב"ירייה" אחת הוא 0.2, נערכו 10 יריות.
א. מה הסכוי לפגוע במטרה לפחות פעמיים? ב. מה הסכוי שפגעו במטרה לפחות פעמיים אם ידוע שפגעו בה לפחות פעם אחת?
ג. באיזה הנחה השתמשת על מנת לפתור את השאלה?

פתרון: א. $1-P(X\le 1)=1-0.8^{10}-\binom{10}{1}\cdot 0.8^9\cdot 0.2\cong 0.624$

ב. $\dfrac{1-0.8^{10}-\binom{10}{1}\cdot 0.8^9\cdot 0.2}{1-0.8^{10}}\cong 0.699$

ג. הנחת אי תלות בין היריות.

שלומי

<u>שאלה:</u> יהי X מספר העצים המתקבלים ב-n הטלות מטבע הוגן, בלתי תלויות אחת באחרות. הוכח $P(X \text{ זוגי})=0.5$

<u>פתרון ראשון:</u> יהי X_k סכום k ההטלות הראשונות

$$P(X_n \text{ זוגי}) = P(X_{n-1} \text{ זוגי})\cdot P(\text{ההטלה האחרונה פלי}) + P(X_{n-1} \text{ אי זוגי})\cdot P(\text{ההטלה האחרונה עץ}) =$$

$$= P(X_{n-1} \text{ זוגי})\cdot 0.5 + P(X_{n-1} \text{ אי זוגי})\cdot 0.5 =$$

$$= \big(P(X_{n-1} \text{ זוגי}) + P(X_{n-1} \text{ אי זוגי})\big)\cdot 0.5 = 1\cdot 0.5 = 0.5$$

<u>הערה:</u> למעשה הוכחנו שדי שמטבע אחד יהיה מאוזן כדי שהסכום יהיה זוגי בסכוי 0.5. לא הנחנו כל הנחה על הזוגיות של X_{n-1}.

<u>פתרון שני:</u>

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}$$

$$0^n = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(-1)^k = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k} - \sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/2\rfloor}\binom{n}{2k+1}$$

מסכם שתי הזהויות נקבל

$$2^n = 2\cdot\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k} = 2^{n-1}$$

$$P(X \text{ זוגי}) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}\cdot 0.5^n = 0.5^n\cdot 2^{n-1} = 0.5$$

<u>פתרון שלישי:</u>

$$P(X \text{ זוגי}) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2k}\cdot 0.5^n \overset{*}{=} 0.5^n\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\left[\binom{n-1}{2k-1}+\binom{n-1}{2k}\right] =$$

$$= 0.5^n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} = 0.5^n\cdot 2^{n-1} = 0.5$$

* על פי זהות קומבינטורית $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$

כאשר $\binom{r}{t}=0$ עבור $t<0$ או $r<t$.

שלומי

שאלה: הסכוי להכשל בקורס מבוא במועד א' הוא 0.6. נגשים לבחינה 100 סטודנטים, ואלה שנכשלים נגשים למועד ב'. הסכוי להכשל במועד ב' הוא 0.5, אלה שנכשלים גם בו מבקשים מועד מיוחד. מה התפלגות מספר הבחינות שיאלצו המרצה לחבר?

פתרון:

תלמיד עובר את המועד הראשון בסכוי 0.4

תלמיד עובר את המועד הראשון או השני בסכוי $1-0.6\cdot 0.5=0.7$

רק אם כולם יעברו את הראשון $P(X=1)=0.4^{100}$

רק אם כולם יעברו את אחד משני המועדים הראשונים אך לא כולם את הראשון $P(X=2)=0.7^{100}-0.4^{100}$

אם לא כולם יעברו את אחד משני הראשונים $P(X=3)=1-0.7^{100}$

הערה: הפתרון $P(X=2)=\sum_{k=1}^{100}\binom{100}{k}\cdot 0.6^k\cdot 0.4^{100-k}\cdot 0.5^k$ נכון אבל צריך להגיע לביטוי פשוט ונוח לחישוב.

$$\sum_{k=1}^{100}\binom{100}{k}\cdot 0.6^k\cdot 0.4^{100-k}\cdot 0.5^k=\left(\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cdot 0.3^k\cdot 0.4^{100-k}\right)-\binom{100}{0}\cdot 0.4^{100}=0.7^{100}-0.4^{100}$$

באופן דומה:

$$P(X=3)=\sum_{k=0}^{99}\binom{100}{k}\cdot 0.4^k\cdot 0.6^{100-k}\cdot\left(1-0.5^{100-k}\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{99}\binom{100}{k}\cdot 0.4^k\cdot 0.6^{100-k}-\sum_{k=0}^{99}\binom{100}{k}\cdot 0.4^k\cdot 0.3^{100-k}=$$

$$=1-0.4^{100}-0.7^{100}+0.4^{100}=1-0.7^{100}$$

שלומי

<u>שאלה:</u> 4 כדורים הוכנסו באופן מקרי ל 5 תאים. יהי X_i מספר התאים שבהם i כדורים. מצא את ההתפלגויות של X_1 ו X_2.

<u>פתרון:</u>

$X_1=0$ אם יש שני תאים של שני כדורים או אחד של ארבעה.

אם יש שני תאים של שני כדורים, צריך לבחור שני כדורים לתא אחד.

$$P(X_1=0)=\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{2}+5}{5^4}=\frac{13}{125}$$

$$P(X_1=1)=\frac{5\cdot 4\cdot\binom{4}{3}}{5^4}=\frac{16}{125}$$ (תא של שלושה ותא של אחד)

$$P(X_1=2)=\frac{5\cdot\binom{4}{2}\binom{4}{2}\cdot 2}{5^4}=\frac{72}{125}$$ (תא של שניים ושני תאים של אחד)

$$P(X_1=3)=0$$

$$P(X_1=4)=\frac{5!}{5^4}=\frac{24}{125}$$ (ארבעה תאים של אחד ותא ריק)

$$P(X_2=1)=\frac{5\cdot\binom{4}{2}\binom{4}{2}\cdot 2}{5^4}=\frac{72}{125}\qquad P(X_2=2)=\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{2}}{5^4}=\frac{12}{125}$$

$$P(X_2=0)=\frac{5!+5\cdot 4\cdot\binom{4}{3}+5}{5^4}=\frac{41}{125}$$ (ארבעה תאים של אחד, או תא של שלושה ותא של אחד או תא של ארבעה)

<u>הערה חשובה:</u> בהכנסת כדורים זהים לתאים אין למצבים השונים במרחב המדגם הסתברות זהה, למשל לא סביר שכולם יכנסו לתא אחד ויותר סביר שתהיה חלוקה מאוזנת מסוימת. למשל בהכנסת שלושה כדורים לשלושה תאים יש סכוי של $\frac{1}{27}$ שכל הכדורים יהיו בתא מסוים וסכוי של $\frac{3!}{27}$ שבכל תא יהיה אחד.

לכן אין להשתמש במודל זה כמרחב מדגם. <u>מרחב מדגם חייב להיות סימטרי</u>.

שלומי

שאלה: בבחינה אמריקאית לכל שאלה 4 תשובות, מהן רק אחת נכונה. תלמיד יודע את התשובה הנכונה לכל שאלה בסבי' p ואחרת הוא מנחש (מסמן תשובה מקרית). על כל תשובה נכונה מקבל התלמיד 5 נקודות ועל תשובה שגויה יורדות 2 נקודות. בבחינה 20 שאלות. מהי תוחלת הציון שהתלמיד יקבל? איזה הנחה אתה מניח בפתרון השאלה (אם בכלל)?

פתרון:

X_i – מספר הנקודות הנצברות בשאלה i, X – מספר הנקודות הנצברות בבחינה כולה.

$$P(X_i=5)=p+\frac{1}{4}(1-p) \qquad P(X_i=-2)=\frac{3}{4}(1-p)$$

$$E(X)=\sum_{i=1}^{20}E(X_i)=20\cdot E(X_1)=20\left(5\cdot\left(p+\frac{1-p}{4}\right)-2\cdot\frac{3(1-p)}{4}\right)=105p-5$$

תוחלת סכום של משתנים שווה תמיד לסכום התוחלות, לכן הנחת אי תלות בין נכונות של תשובות שונות אינה חיונית. הנחה חיונית היא שאפשרי ציון שלילי בבחינה כולה. במקרה זה יש הסתברות חיובית ובמציאות מקרה זה משוקלל כ0.

שאלה: בתוכנית "מחפשים את המטמון" הציעו 3 אנשים את עצמם לגשת למטמון. אברהם דרש 500 ש"ח, והסבי' שיגיע למטמון הוא 0.5, בני דרש 1,000 ש"ח והסבי' שיגיע למטמון הוא 0.6 ואילו גדי דרש 1,500 ש"ח והסבי' שיגיע למטמון הוא 0.4. יהי X מספר האנשים שהגיעו למטמון (אנשים יוצאים לדרך, הם לגמרי בלתי תלויים ביניהם, וכל מי שמגיע למטמון מקבל את כספו). חשב:

א. את חוק ההסתברות של X. ב. תוחלת התשלום שיצטרך עורך התוכנית לשלם לאנשים אלה.

פתרון:

א. $P(X=0)=0.5\cdot0.4\cdot0.6=0.12 \qquad P(X=3)=0.5\cdot0.6\cdot0.4=0.12$

$P(X=1)=0.5\cdot0.4\cdot0.4+0.5\cdot0.6\cdot0.6+0.5\cdot0.4\cdot0.6=0.38$

$P(X=2)=0.5\cdot0.6\cdot0.4+0.5\cdot0.4\cdot0.4+0.5\cdot0.6\cdot0.6=0.38$

ב. $E(Y)=0.5\cdot500+0.6\cdot1{,}000+0.4\cdot1{,}500=1{,}450$

(תוחלת הסכום שצריך לשלם שווה לסכום התוחלות שצריך לשלם לפרטים ולא כדאי להסתבך בחישוב ההתפלגות של Y).

שלומי

שאלה: ההתפלגות הגאומטרית הקטומה היא התפלגות מספר הנסיונות בסדרה של נסויי ברנולי בלתי תלויים, כאשר הסדרה נמשכת עד להצלחה ראשונה אם יש כזו, אך לא מבצעים יותר מ n נסויים. ההסתברות להצלחה בכל נסוי — p. מצא את התוחלת של התפלגות זו.

פתרון: יהי X משתנה המתפלג התפלגות גיאומטרית קטומה.

$$E(X)\overset{*}{=}\sum_{i=1}^{\infty}P(X\geq i)=\sum_{i=1}^{n}q^{i-1}=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1-q^n}{p}$$

* עבור משתנה שמקבל רק ערכים טבעיים כולל אפס.

שאלה: מתוך 10 אנשים, שלושה נבחרים באופן מקרי עם חזרה. יהי X מספר השונים במדגם. מצאו את $E(X)$.

פתרון בדרך ראשונה: יהי X_i האינדיקטור שאדם i נבחר.

$$E(X)=\sum_{i=1}^{10}E(X_i)=10(1-0.9^3)=2.71$$

פתרון דרך שניה (פחות מומלצת):

$$E(X)=P(X=1)\cdot 1+P(X=2)+P(X=3)\cdot 3=$$

$$=\frac{10}{10^3}\cdot 1+\frac{\binom{10}{2}\cdot 2\cdot 3}{10^3}\cdot 2+\frac{10\cdot 9\cdot 8}{10^3}\cdot 3=2.71$$

הערה: אילו היה מדובר במספרים גדולים יותר כמו למשל בחירת עשרה אנשים מתוך 100, אז הדרך השניה לא היתה שימושית. לעומת זאת לפי הראשונה:

$$E(X)=100\cdot(1-0.99^{10})$$

שלומי

שאלה: מפזרים ארבעה כדורים בארבעה תאים באופן מקרי (אין מגבלה על תכולת כל תא). יהי X_i מספר התאים המכילים i כדורים בדיוק ויהי Y_k מספר הכדורים בתא מספר k.

א. מצאו את התפלגות X_0 ב. מצאו את התפלגות Y_1

ג. לכל k, i מצאו את התוחלת $E(X_i)$, $E(Y_k)$.

פתרון:

$$P(X_0=0)=\frac{4!}{4^4} \qquad P(X_0=3)=\frac{4}{4^4}=\frac{1}{64}$$

$$P(X_0=1)=\frac{4\cdot\binom{4}{2}\cdot 3!}{4^4}$$ (בחירת תא שיהיה ריק, בחירת זוג שיהיה ביחד וסידור הזוג ושני האחרים)

$$P(X_0=2)=\frac{\binom{4}{2}\binom{4}{2}+4\cdot 3\cdot 4}{4^4}$$ (שני תאים של שניים או תא של אחד ותא של שלושה)

ודרך אחרת $$P(X_0=2)=\binom{4}{2}\cdot\left(0.5^4-2\cdot 0.25^4\right)=\frac{21}{64}$$

$$\forall k:\quad Y_k\sim B\left(4,\frac{1}{4}\right)\Longrightarrow E(Y_k)=n\cdot p=4\cdot\frac{1}{4}=1$$

$$\forall i\quad E(X_i)=4\cdot P(Y_1=i)$$

הערות:

1. זאת דוגמא נוספת לכך שלפעמים כדי לחשב את התוחלת, לא צריכים לחשב את ההתפלגות.
2. אסור לעבוד עם מודל של כדורים זהים. במודל של כדורים זהים מרחב המדגם אינו סימטרי, יש בו מצבים שההסתברות שלהם גדולה יותר מלאחרים. דוגמא פשוטה לצורך המחשה: אם יש שני כדורים ושלושה תאים, אז הסכוי שבתא מסוים יהיו שני כדורים הוא $\frac{1}{9}$ ואילו הסכוי שבשני תאים שונים מסוימים יהיו כדורים הוא $\frac{2}{9}$.

שלומי

שאלה: על משתנה מקרי ידוע כי: $V(X)=2$ ו- $E(X^2)=66$

א. מהי התוחלת ב. ידוע כי $X\sim U(a,b)$ מצא את a ואת b (יש יותר מפתרון אחד)

פתרון:

א. $$V(X)=E(X^2)-E^2(X)\Longrightarrow E^2(X)=66-2\Longrightarrow E(X)=\pm 8$$

ב. $$X\sim U(a,b)\quad b>a \Longrightarrow V(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}\Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (b-a+1)^2=25\Longrightarrow b-a+1=5$$

I. $$\begin{cases}(a+b)/2=8\\ b-a=4\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}b=10\\ a=6\end{cases}$$

II. $$\begin{cases}(a+b)/2=8\\ b-a=4\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}b=-6\\ a=-10\end{cases}$$

הערה: נוסחת השונות של התפלגות אחידה $V(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$ מתאימה רק ל- $b>a$, לכן אין ארבע פתרונות אלא רק שניים.

שאלה: התפלגות מספר הלקוחות המגיעים לבנק בשעה היא פואסונית עם פרמטר λ. כל לקוח מושך כסף בהסתברות p. מהי התפלגות מספר המשיכות בשעה?

פתרון:

X- מספר הלקוחות Y- מספר המשיכות

$$P(Y=1)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X=k)\cdot P(Y=1|X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\binom{k}{1}p^1(1-p)^{k-1}=$$
$$=e^{-\lambda}\cdot(\lambda p)^1\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}\cdot k!\cdot(1-p)^{k-1}}{k!\cdot(k-1)!\cdot 1!}=e^{-\lambda}\cdot\frac{(\lambda p)^1}{1!}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{k-1}}{(k-1)!}=$$
$$=e^{-\lambda}\cdot\frac{(\lambda p)^1}{1!}\cdot\left[\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}\right]\overset{*}{=}e^{-\lambda}\cdot\frac{(\lambda p)^1}{1!}\cdot e^{\lambda(1-p)}=$$
$$=e^{-\lambda p}\cdot\frac{(\lambda p)^1}{1!}\Longrightarrow Y\sim P(\lambda p)$$

* הכתוב בסוגריים מרובעים הוא הפיתוח לטור טיילור של $e^{\lambda(1-p)}$

שלומי

שאלה: מכניסים 3 כדורים אקראית ל-4 תאים. X-מספר הכדורים בתא מספר 1 ואילו Y-מספר התאים התפוסים.

א. חשב $cov(X,Y)$

ב. האם X ו- Y לא מתואמים?

ג. האם X ו- Y לא תלויים?

פתרון:

חישוב ה cov בדרך השגרה:

$$cov(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)=2\cdot p(X=1,Y=2)$$

$$+3\cdot p(X=1,Y=3)+3\cdot p(X=3,Y=1)+4\cdot p(X=2,Y=2)$$

$$-\left(3\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\left(4\cdot\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)\right)=$$

$$=\frac{2\cdot3\cdot3+3\cdot3\cdot3!+3+4\cdot3\cdot3}{64}-\frac{3}{4}\cdot4\cdot\frac{37}{64}=0$$

חישוב ה cov בדרך שניה:

I. $0=cov(3,Y)=cov\left(\sum_{i=1}^{4}X_i,Y\right)=\sum_{i=1}^{4}cov(X_i,Y)$

II. $cov(X_i,Y)=cov(X_j,Y)\quad \forall\, i,j\quad i\neq j$

מ- I ו- II נובע ש $cov(X_i,Y)=0$ לכל i ובפרט $cov(X_1,Y)=0$,
לכן המשתנים לא מתואמים.

הם תלויים מכיוון שלמשל $p(Y=3)\neq0=p(Y=3/X=3)$

שלומי

שאלה: בחדר n זוגות נשואים (סך הכל $2n$ אנשים) המסתדרים באופן מקרי בשורה.
יהי X מספר הזוגות (מתוך n) אשר עומדים ביחד (שני בני הזוג סמוכים זה לזה).
מצאו את תוחלת ושונות X (רמז - נא להתעלם, כלומר לא לחשב את התפלגות X)

פתרון: יהי X_i האינדיקטור שזוג i עומד ביחד

$$E(X_i)=\frac{2\cdot(2n-1)!}{(2n)!}=\frac{1}{n} \qquad E(X)=n\cdot\frac{1}{n}=1$$

$$Var(X_i)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n} \qquad \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)=\frac{n-1}{n}$$

$$cov(X_i,X_j)=E(X_i\cdot X_j)-E(X_i)\cdot E(X_j)=\frac{2^2\cdot(2n-2)!}{(2n)!}-\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2(2n-1)}$$

$$Var(X)=\frac{n-1}{n}+n(n-1)\cdot\frac{1}{n^2(2n-1)}=\frac{2(n-1)}{2n-1}$$

הערה: המתאם חיובי מכיון שאם זוג אחד עומד ביחד אז יש פחות אלמנטים לסדר וגדלים סיכויים של זוגות אחרים לעמוד ביחד.

שאלה (ממבחן סמסטר ב' תשנ"ג): בבנין בן 10 קומות נכנסים למעלית 5 אנשים בקומת הקרקע. כל אחד יוצא באופן מקרי ובלתי תלוי על פני אחת הקומות מ-1 עד 10.
א. מה ההסתברות שהמעלית תעלה עד הקומה החמישית לכל היותר?
ב. מה ההסתברות שהמעלית תעלה בדיוק עד הקומה החמישית ולא יותר?
ג. מה ההסתברות שהמעלית תיעצר בקומה החמישית?
ד. יהי X מספר הקומות בהן עוצרת המעלית. תמצאו את $E(X)$.

פתרון: א. $\left(\frac{5}{10}\right)^5$ ב. $\frac{5^5-4^5}{10^5}$ (שכולם יעלו לא יותר מ-5 קומות אך לא שכולם יעלו פחות מ-5)

ג. $1-\left(\frac{9}{10}\right)^5$ ד. $E(X)=\sum_{i=1}^{10} E(X_i)=10\cdot\left(\frac{10^5-9^5}{10^5}\right)$

שלומי

שאלה: מטילים קוביה N פעמים. נגדיר X- מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 6, Y- מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה 5. חשבו את $cov(X,Y)$ מבלי לחשב את ההתפלגות המשותפת של X ו- Y.

פתרון בדרך ראשונה: x_i - האינדיקטור שמקבל ערך 1 אם הקוביה ה-i היתה 6.
y_i - האינדיקטור שמקבל ערך 1 אם הקוביה ה-i היתה 5.

$$cov(x,y) = cov\left(\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right), \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\right) \overset{*}{=} \sum_{i=1}^{n} cov(x_i, y_i) =$$

$$= N\left(0 - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right) = -\frac{N}{36}$$

*ההטלות השונות בלתי תלויות

פתרון בדרך שניה: יהי Z מספר התוצאות השונות מ- 5 ו- 6

$$Var(Z) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot N \qquad Var(x) = Var(y) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot N$$

$$Var(Z) = Var(N-Z) = Var(x+y) = Var(x) + Var(y) + 2\cdot cov(x,y)$$

$$\Longrightarrow cov(x,y) = -\frac{1}{36}N$$

המתאם שלילי מכיון שכאשר יש יותר פעמים 6 סביר שיהיו פחות פעמים 5.

שאלה: בכיתה n תלמידים. מכלל $\binom{n}{2}$ הזוגות יהי X מספר הזוגות שהם לשני בני הזוג יום הולדת באותו יום בשנה. חשבו את תוחלת ושונות X (רמז- להתעלם...)

פתרון: יהי X_k האינדיקטור שזוג k נולד באותו יום.

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\binom{n}{2}} E(X_k) = \binom{n}{2}\cdot E(X_1) = \frac{\binom{n}{2}\cdot 365}{365^2} = \frac{\binom{n}{2}}{365}$$

$$cov(X_i, X_j) = E(X_i, X_j) - E(X_i)\cdot E(X_j) = \frac{1}{365}\cdot\frac{1}{365} - \left(\frac{1}{365}\right)^2 = 0$$

$$Var(X_k) = \sum_{k=1}^{\binom{n}{2}} Var(X_k) = \binom{n}{2}\cdot\frac{1}{365}\cdot\frac{364}{365}$$

שלומי

שאלה: מטילים מטבע בו הסכוי ל"עץ" הינו p כאשר p אינו ידוע ורוצים להעריכו ע"י ההסתברות היחסית של מספר "העצים" Y. לכמה הטלות נזדקק כדי להבטיח שההסתברות לפחות 0.9, יהיה $|Y-p|\le\alpha$ (α קבוע)?

פתרון: השונות של ממוצע ההטלות היא $\frac{p\cdot q}{n}=\frac{n\cdot p\cdot q}{n^2}$ שאינו עולה בשום פעם על גודל $\frac{1}{4n}$.

$$P(|Y-p|\le\alpha)\ge 1-\frac{\frac{1}{4n}}{\alpha^2}$$

$$1-\frac{1}{4\cdot n\cdot\alpha^2}\ge 0.9 \Longrightarrow \frac{1}{4n\cdot\alpha^2}\le 0.1 \Longrightarrow n\ge\frac{1}{0.4\cdot\alpha^2}$$

שאלה: בקומת הקרקע (אפס) של בניין בן 100 קומות עם 14 מדרגות בין קומה לקומה, אדם מטיל קוביה ועולה מספר מדרגות כתוצאת הקוביה, אך הוא חוזר על התהליך שוב ושוב. בסך הכל לא יותר מ-420 הטלות קוביה. תן חסם מלעיל קטן ככל שתוכל לסכוי ש-420 ההטלות לא יספיקו כדי להגיע לגג?

פתרון: יהי X מספר המדרגות שיעלה ב-420 הטלות.

$$E(X)=3.5\cdot 420=1{,}470 \qquad Var(X)=420\cdot\frac{(6-1+1)^2-1}{12}=1{,}225$$

על-פי גרסה אחת של אי שוויון צ'בישב:

$$P(X<14\cdot 100)\overset{*}{\le} 0.5\cdot\frac{Var(x)}{(1{,}470-1{,}400)^2}=\frac{1{,}225}{2\cdot 70^2}\cong 0.125$$

על-פי גרסה שניה של אי שוויון צ'בישב:

$$P(X\le 1{,}399)\overset{*}{\le} 0.5\cdot\frac{Var(x)}{(1{,}470-1{,}399)^2}=\frac{1{,}225}{2\cdot 71^2}\cong 0.122$$

* בגלל הסימטריות שבהתפלגות הטלת קוביה, הסכויים לסטייה כלפי מעלה שווים לסכויים לסטייה כלפי מטה, לכן מותר להכפיל ב-0.5.

שלומי