

בחינה במבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
מוותר לכל תלמיד להשתמש בדף A4 אחד הכתוב משני צדדיו. אין להעביר דפים אלה בין תלמידים.
מוותר להשתמש במחשב כיס.
בבחינה יש 4 שאלות. ענו על כל השאלות.
משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.
ניתן לצבור בסך הכל 110 נקודות. הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
אנא, השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.
נמקו את תשובותיכם!

בהצלחה!

שאלה 1 (40 נקודות)

מבצעים סדרה של 10 הטלות ב"ת של מטבע הוגן שעל צד אחד שלו מופיע "עץ" ועל הצד השני מופיע "פלי".

- א. מהי שונות מספר תוצאות ה"עץ" בחמשת ההטלות האחרונות?
ב. מהי ההסתברות שלא יהיה אף רצף של שתי תוצאות "עץ" וגם לא יהיה אף רצף של שתי תוצאות "פלי"?
ג. מהי שונות מספר הרצפים של 9 תוצאות "עץ"?
ד. הראו שההסתברות שיהיה לפחות רצף אחד של 5 תוצאות "עץ" אינה גדולה מ $\frac{6}{32}$.

שאלה 2 (20 נקודות)

מבצעים סדרה אין סופית של הטלות ב"ת של קוביה תקינה.

- א. מהי ההסתברות שנקבל הטלה עם תוצאה זוגית לפני שנקבל לראשונה הטלה עם תוצאה שהיא כפולה שלמה של 3?
ב. מהי ההסתברות שנקבל בדיוק פעמיים תוצאה של 5 לפני שנקבל לראשונה תוצאה של 4?
-

שאלה 3 (30 נקודות)

נתונה קובייה תקינה. מטילים את הקובייה פעם אחת (הטלה ראשונה) ומסתכלים על התוצאה i שהתקבלה (שיכולה להיות כל שלם שבין 1 ל 6). אם התקבלה תוצאה i אז מבצעים i הטלות נוספות של הקובייה. i ההטלות האלה הן ב"ת ביניהן וגם ב"ת בהטלה הראשונה.

נסתכל על סדרת ההטלות שכוללת את ההטלה הראשונה.

- א.** מהי תוחלת מספר ההטלות שבסדרה?
ב. מהי ההסתברות שסכום התוצאות בסדרת ההטלות הוא כפולה שלמה של 3?
ג. מהי ההסתברות שבהטלה הלפני אחרונה התקבלה התוצאה 2?
-

שאלה 4 (20 נקודות)

מבצעים סדרה אין סופית של הטלות ב"ת של מטבע הוגן שעל צד אחד שלו רשום +1 ועל הצד האחר רשום -1.

עבור כל $1 \leq n < \infty$ יהי S_n - סכום n ההטלות הראשונות.
תהי ϕ - פונקצית ההסתברות המצטברת של משתנה נורמלי סטנדרטי.

- א.** מצאו b ממשי כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(0 < \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \phi(b) - \phi(0)$.
ב. האם קיים a ממשי כך ש $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(0 < \frac{S_n}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \phi(0) - \phi(a)$?
-