

**פתרון לבחינה מ 17/07/16**

**שאלה 1**

**א.**

$$P(X = 0) + P(X = 2) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}$$

**ב.**

$$P(Y = 0) = P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$P(Y = 1) = P(X = 1) = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$P(Y = 4) = P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}$$

$$P(Y = 9) = P(X = 3) = \left(\frac{1}{3}\right)^3$$

**ג.**

$$P(Z = X \mid X \geq 2) = P(X = 2 \mid X \geq 2) = \frac{P(X = 2)}{P(X \geq 2)} = \frac{\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3}}{\binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^3}$$

**ד.**

$$V(Z) = E(Z^2) - E^2(Z) =$$

$$= \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 0^2 + \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 1^2 + \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 5^2 \right]$$

$$- \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 0 + \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 1 + \binom{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 5 \right]^2$$

## שאלה 2

$$\begin{aligned} P(X = Y = Z = 3) &= P(X = Y = 3) \stackrel{\text{independent}}{=} P(X = 3)P(Y = 3) = \\ &= \left[ \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\text{צריך שיתקיים } (Y \leq 3) \text{ מתקיים } P(Y \leq 3) = 1 - P(Y > 3) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

מדובר בתוחלת סכום של שלושה אינדיקטורים: אינדיקטור ש  $X$  קטן או שווה ל 3, ש  $Y$  קטן או שווה ל 3, ש  $Z$  קטן או שווה ל 3. תוחלת סכום של משתנים שווה לסכום התוחלות שלהם. התוחלת של כל אחד מהאינדיקטורים שווה להסתברות שמשתנה מסוים יקבל ערך קטן או שווה ל 3. המאורע שהמשתנה  $Z$  קטן או שווה ל 3 הוא המאורע ש  $X$  וגם  $Y$  קטנים או שווים ל 3.

$$\text{תוחלת הסכום היא } \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right] + \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right] + \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right] \cdot \left[ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right]$$

עבור כל  $w$  טבעי מתקיים:

$$\begin{aligned} P(W > w) &= P(X > w, Y > w) = P(X > w)P(Y > w) = \\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^w \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^w = \left(\frac{4}{9}\right)^w \end{aligned}$$

זה אומר ש  $W \sim G\left(\frac{5}{9}\right)$  (כי כדי לקבל ערך גדול מ  $w$  צריך לקבל  $w$  כשלונות שלכל

אחד מהם יש הסתברות  $\frac{4}{9}$ .)

נוכל גם על סמך החישוב שעשינו, להמשיך לחשב את פונקציית ההסתברות של  $W$ :

$$\begin{aligned} P(W = w) &= P(W > w-1) - P(W > w) = \left(\frac{4}{9}\right)^{w-1} - \left(\frac{4}{9}\right)^w = \\ &= \left(1 - \frac{4}{9}\right) \left(\frac{4}{9}\right)^{w-1} = \frac{5}{9} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{w-1} \end{aligned}$$

וזו פונקציית ההסתברות של משתנה  $G\left(\frac{5}{9}\right)$ .

### אינטואיציה לתוצאה זו

משתנה גיאומטרי סופר את מספר הנסיונות עד קבלת הצלחה בסדרת נסיונות ב"ת שווי הסתברות. כאן מבצעים שתי סדרות של נסיונות ומסתכלים על הזמן הראשון שבו לפחות באחת מהן תהיה הצלחה. אם עד עכשיו לא היתה הצלחה באף אחת מהן, אז

לפי עקרון ההכלה וההפרדה, יש הסתברות של  $\frac{5}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2$  שלפחות באחת מהן

תהיה הצלחה בשלב הזה.

### שאלה 3

**א.** לא יתכן. מתאם של 1 יתכן רק אם יש קשר לינארי בין שני משתנים. אבל כאן  $Y$  יכול לקבל 6 ערכים ואילו  $X$  יכול לקבל רק 5 ערכים. לכן לא יתכן שעבור כל ערך של  $X$  יתקבל רק ערך מסוים של  $Y$ . לכן, לא יתכן שיש קשר לינארי.

**ב.**  $\frac{5}{6}$

בסיכוי של  $\frac{1}{6}$ ,  $Y$  מקבל את הערך 6. במקרה כזה  $X$  לא יכול להיות שווה לו.

יתכן שעבור כל ערך אפשרי אחר ש  $Y$  מקבל,  $X$  בהכרח יקבל את אותו ערך (עבור כל ערך שבין 1 ל 5, ההסתברות ש  $X$  יקבל אותו גדולה מההסתברות ש  $Y$  יקבל אותו).

**ג.** יתכן שאם  $(Y = 1)$ , אז בהכרח יתקיים  $(X = 1)$ . לכן יתכן  $E(X | Y = 1) = 1$ . לעומת זאת, לא יתכן שיתקיים  $(Y = 1)$  בכל מקרה שמתקיים  $(X = 1)$ . במקרה ש  $(X = 1)$  צריכים להתקבל גם ערכי  $Y$  שונים מ 1. כדי להביא למינימום את התוחלת המותנה, צריך שערכים אלה יהיו כמה שיותר קטנים. אפשרי שאם  $(X = 1)$ , אז  $Y$  יקבל רק ערכים של 1 ו 2.

$$P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30} \quad \text{ו} \quad P(X = Y = 1) = \frac{1}{6}$$

$$P(Y = 1 | X = 1) = \frac{5}{6} \quad \text{ולכן} \quad P(Y = 2 | X = 1) = \frac{P(X = 1, Y = 2)}{P(X = 1)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{5}} = \frac{1}{6}$$

$$\text{ומתקיים} \quad E(Y | X = 1) = \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{5}{6} \cdot 1 = \frac{7}{6}$$

---

שלומי