פתרון לבחינה מ 11/02/15

שאלה 1

א. התפלגות $Bin(3,0.5)$
(אפשר גם במקום לרשום שזו התפלגות בינומית, לתת את פונקצית ההסתברות).

ב. $P(X^2=0)=P(X=0)=0.5^3$, $P(X^2=1)=P(X=1)=3\cdot 0.5^3$,
$P(X^2=4)=P(X=2)=3\cdot 0.5^3$, $P(X^2=9)=P(X=3)=0.5^3$

הערה
X^2 אינו בעל אחת ההתפלגויות המיוחדות. לכן כאן צריך לרשום את פונקצית ההסתברות.

ג. $$P(X=1\mid X\le 2)=\frac{P(X=1,X\le 2)}{P(X\le 2)}=\frac{P(X=1)}{1-P(X=3)}=\frac{3\cdot 0.5^3}{1-0.5^3}=\frac{3}{7}$$

שאלה 2

א. $$0.5\cdot 0.5+0.5\cdot 0.5^2=\frac{3}{8}$$
(אם הם זהים, אז בסיכוי חצי ואם הם אינם זהים, אז בסיכוי רבע).

ב. $$r(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$
X,Y הם כל אחד אינדיקטורים בעלי הסתברות חצי ולכן
$$V(X)=V(Y)=0.5\cdot 0.5=0.25$$
(שונות של אינדיקטור בעל הסתברות p שווה ל $p(1-p)$).
$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$
(XY מקבל את הערך 1 אם שניהם בנים, אחרת הוא מקבל את הערך 0, לכן תוחלתו שווה להסתברות שהוא מקבל את הערך 1).
לכן $r(X,Y)=\frac{1/8}{1/4}=0.5$

ג. A - המאורע ששניהם בנים
B - המאורע שהם זהים
$$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.5\cdot 0.5}{\frac{3}{8}}=\frac{2}{3}$$

שאלה 3

א.
$$P(Y>X)=\sum P(Y=k)P(X<k)=$$
$$=P(Y=1)\cdot 0+P(Y=4)\cdot\frac{3}{6}+P(Y=5)\cdot\frac{4}{6}+P(Y=6)\cdot\frac{5}{6}=$$
$$=\frac{2}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{9}$$

ב. הסתברות המשלים היא
$$\left(P(X=1)+P(X=3)+P(X=5)\right)\left(P(Y=1)+P(Y=5)\right)=\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$

לכן, הסתברות המאורע היא $\frac{5}{6}$.

<u>הערה</u>
אפשר גם לחשב ישירות לפי עקרון ההכלה וההפרדה. הסתברות האיחוד שלפחות בהטלה אחת נקבל תוצאה זוגית שווה לסכום ההסתברויות על פני שני המטבעות פחות הסתברות החיתוך.
$$\frac{3}{6}+\frac{4}{6}-\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{6}$$

ג.
$$E(2X+Y)=E(2X)+E(Y)=2E(X)+E(Y)=$$
$$=2\cdot\frac{1+6}{2}+\left(\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{2}{6}\cdot 4+\frac{1}{6}\cdot 5+\frac{2}{6}\cdot 6\right)=\frac{34}{3}$$

ד. לגבי כל הטלה שבין השניה לתשיעית יתקיים התנאי, אם מתקבל בה 4 ובקודמת לה התקבל 1 ובבאה 5 או 6, או שהתקבל בה 5 ובקודמת לה התקבל 1 או 4 ובבאה 6. זה קורה בסיכוי
$$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{12}{216}=\frac{1}{18}$$

תוחלת סכום שמונה אינדיקטורים שווה לסכום תוחלתם $\frac{8}{18}=\frac{4}{9}$.

<u>הערה</u>
שימו לב שהמאורע שתוצאה מסוימת גדולה מתוצאה אחת והמאורע שהיא קטנה מתוצאה אחרת הם תלויים (אם למשל מתקיים שבהטלה 2 קבלנו תוצאה גבוהה מאשר בהטלה 1, אז גדלים הסיכויים שבהטלה 2 קבלנו תוצאה גבוהה, וקטנים הסיכויים שבהטלה 2 נקבל תוצאה נמוכה מבהטלה 3).
לכן הסתברות החיתוך שלהם אינה שווה למכפלת ההסתברויות שלהם.
<u>הערה נוספת</u>
הסיכוי שבהטלה השניה נקבל תוצאה גבוהה מבראשונה ונמוכה מבשלישית הוא שליש, רק אם ידוע שבשלושת ההטלות קבלנו שלוש תוצאות שונות. אבל זה לא המצב כאן.

ה. <u>דרך ראשונה</u>
יהי M - המכסימום
$$P(M=1)=\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$$
$$P(M=4)=P(M\le 4)-P(M<4)=\left(\frac{3}{6}\right)^{10}-\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$$

$$P(M=5)=P(M\le 5)-P(M<5)=\left(\frac{4}{6}\right)^{10}-\left(\frac{3}{6}\right)^{10}$$

$$P(M=6)=1-\left(\frac{4}{6}\right)^{10}$$

$$E(M)=P(M=1)\cdot 1+P(M=4)\cdot 4+P(M=5)\cdot 5+P(M=6)\cdot 6$$

<u>דרך שניה</u> (לפי נוסחת הזנב)

$$P(M\ge 1)=1$$

$$P(M\ge 2)=P(M\ge 3)=P(M\ge 4)=1-P(M=1)=1-\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$$

$$P(M\ge 5)=1-\left(\frac{3}{6}\right)^{10}$$

(מתקיים $(M\ge 5)$ אם לא בכל ההטלות קבלנו תוצאות של 1 ו 4).

$$P(M\ge 6)=1-\left(\frac{4}{6}\right)^{10}$$

עבור $k>6$ מתקיים $P(M\ge k)=0$.

לפי נוסחת הזנב מתקיים

$$E(M)=P(M\ge 1)+P(M\ge 2)+P(M\ge 3)+P(M\ge 4)+P(M\ge 5)+P(M\ge 6)$$

שלומי