פתרון מקוצר לבחינה מ 09/02/10

שאלה 1

א.

$X \backslash Y$	0	1	2	P_X
0	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$\frac{1}{2}$
P_Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

ב.

$Y-X$ זה מספר תוצאות ה"עץ" בהטלה השניה. לכן התוחלת היא $\frac{1}{2}$.

שאלה 2

א. $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$ (בדיוק צעד אחד ימינה וצעד אחד שמאלה)

ב. $\binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\frac{1}{3}+\binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5$ (3 או 4 או 5 צעדים ימינה)

ג. A - ימינה מהראשית לאחר חמישה צעדים.
B - ימינה מהראשית לאחר שלושה צעדים.
C - בנקודה 1 לאחר שלושה צעדים.
D - בנקודה 3 לאחר שלושה צעדים.

$$P(A\mid B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap C)+P(A\cap D)}{P(B)}=$$

$$=\frac{P(C)\cdot\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)+P(D)\cdot 1}{P(B)}=\frac{\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{9}+\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 1}{\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3}$$

פתרון בדרך שניה:

אם בשלב השלישי הוא ימינה מהנקודה 0 אז בהסתברות $a=\dfrac{\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}}{\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3}$ הוא בנקודה

1 ובהסתברות המשלימה $b=\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3}$ הוא יהיה בנקודה 3.

ההסתברות המבוקשת היא $\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)a+b$

ד. $\binom{3}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot|3|+\binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}\cdot|1|+\binom{3}{1}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot|-1|+\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot|-3|$

כאשר | | מסמן ערך מוחלט של מספר.

שאלה 3

מבוקשת ההסתברות שמתקבלות 0 או 2 הצלחות.

$$[(1-0.5)(1-0.5)(1-0.8)]+[0.5\cdot0.5(1-0.8)+0.5(1-0.5)0.8+(1-0.5)0.5\cdot0.8]=0.5$$

השתמשנו בהנחת האי תלות בכך שחישבנו את הסתברויות החיתוך כמכפלת ההסתברויות. אם למשל שני המטבעות הראשונים היו אותו מטבע, אז הם בכל מקרה היו נותנים ביחד 0 או 2 הצלחות והיה צריך להתקבל כשלון בהטלה השלישית וזה קורה בסיכוי $1-0.8=0.2$.

הערה: כאשר מבצעים הטלות ב"ת של מטבעות, אז תנאי מספיק (ולא הכרחי) לכך שנקבל מספר זוגי של הצלחות הוא שלפחות אחד המטבעות הוא הוגן.

שאלה 4

א. תוחלת הסכום של 4 אינדיקטורים שווה לסכום התוחלות שלהם.

כל הטלה היא גבוהה ממש מהקודמת לה בסיכוי $\dfrac{1-\frac{6}{36}}{2}=\dfrac{15}{36}$

או בדרך אחרת: $\frac{1}{6}\cdot0+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$

תוחלת הסכום היא $4\cdot\frac{15}{36}=\frac{5}{3}$

ב. הם בלתי תלויים. X_6 תלוי רק בתוצאות ההטלות החמישית והשישית. X_8 תלוי רק בתוצאות ההטלות השביעית והשמינית.

ג. צריך ש 5 פעמים יהיה שיפור. זה קורה רק אם מתקבלת הסדרה 1,2,3,4,5,6 לפי סדר זה.

ההסתברות לכך היא $\left(\frac{1}{6}\right)^6$.

<u>שאלה 5</u>

ב 3 הטלות לא יכולות להתקבל יותר מ 3 תוצאות שונות. לכן לפחות אחד מהמשתנים חייב לקבל את הערך 0. לכן המכפלה שווה בוודאות ל 0. המכפלה היא משתנה מנוון ולכן שונותה היא 0.
לא השתמשנו בהנחת האי תלות או בכך שהקוביה תקינה.

שלומי