

בחינה במבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.
מותר לכל תלמיד להשתמש בדף A4 אחד הכתוב משני צדדיו. אין להעביר דפים אלה בין תלמידים.
מותר להשתמש במחשב כיס.
בבחינה יש 5 שאלות. ענו על כל השאלות.
משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.
ניתן לצבור בסך הכל 110 נקודות. הצובר N נקודות יקבל ציון $\min\{N, 100\}$.
אנא, השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.
נמקו את תשובותיכם!

בהצלחה!

שאלה 1 (30 נקודות)

מבצעים שתי הטלות ב"ת של קוביה תקינה.
יהי X תוצאת ההטלה הראשונה. יהי Y תוצאת ההטלה השנייה. יהי $Z = X + Y$.
יהי A המאורע ש Z הוא מספר זוגי. יהי B המאורע ש Z הוא כפולה שלמה של 5.

א. מהו $P(Z = 9)$?

ב. מהו $P(B|Z \geq 10)$?

ג. מהו $P(A)$?

שאלה 2 (20 נקודות)

יהיו X ו Y זוג משתנים ב"ת שווי התפלגות.
נניח ש $X \sim G(0.8)$. יהי $Z = \min\{X, Y\}$.

א. מצאו את ההתפלגות של Z .

ב. מהי ההתפלגות של Z בהינתן $(X = 3)$?

שאלה 3 (10 נקודות)

יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית הסתברות מצטברת המקיימת:
 $F_X(x) = 0$ עבור כל $x < 0$, $F_X(x) = 1 - e^{-2x}$, עבור כל $x \geq 0$.

מהו $P(1 < |X| < 2)$?

שאלה 4 (10 נקודות)

הוכיחו או הפריכו על-ידי מתן דוגמא נגדית את הטענה הבאה:
אם $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ היא סדרת משתנים מקריים שווי התפלגות שכל אחד מהם יכול לקבל רק ערכים

$$\text{שלמים, אז לא יתכן שיתקיים } \lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} - \sqrt{2} \right| > \varepsilon \right) = 0 \text{ עבור כל } \varepsilon > 0 \text{ נתון.}$$

שאלה 5 (40 נקודות)

בכיתה יש n בנים ו m בנות. ידוע ש $n \geq 1$ ו $m \geq 1$. כל אחד מבין $n+m$ הילדים משחק נגד כל אחד מהאחרים בדיוק פעם אחת. בכל משחק מנצח בדיוק אחד מבין שני משתתפיו. נתון שבכל משחק יש לכל אחד משני משתתפיו סיכוי של 0.5 לנצח. יהי X מספר הנצחונות הכולל של הבנים. רק בסעיף א' נניח שתוצאות המשחקים השונים הם ב"ת.

- א. עבור אילו ערכי n, m המשתנה X מתפלג בינומית?
- ב. נניח ש $(n=5, m=10)$. מהו $E(X)$?
- ג. נניח ש $(n=5, m=10)$. מהו הערך המינימלי שיכול לקבל $V(X)$?
- ד. נניח ש $(n=5, m=5)$. מהו הערך המינימלי שיכול לקבל $V(X)$?