

## בחינה במבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.  
מותר לכל תלמיד להשתמש בדף A4 אחד הכתוב משני צדדיו. אין להעביר דפים אלה בין תלמידים.  
מותר להשתמש במחשב כיס.  
בבחינה יש 3 שאלות. ענו על כל השאלות.  
משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.  
ניתן לצבור בסך הכל 110 נקודות. הצובר  $N$  נקודות יקבל ציון  $\min\{N, 100\}$ .  
אנא, השאירו את העמוד הראשון (צד אחד של דף) של מחברת הבחינה ריק.  
נמקו את תשובותיכם!

בהצלחה!

---

### שאלה 1 (30 נקודות)

חשוד מובא לשיפוט בפני 5 שופטים. רן הוא אחד מחמשת השופטים. כל שופט מוצא את החשוד אשם בסיכוי 0.5 ובאופן בלתי תלוי בשופטים האחרים. החשוד מורשע אם ורק אם חלים בו זמנית שני תנאים: התנאי הראשון הוא שרן מוצא את החשוד אשם והתנאי השני הוא שלפחות שניים מארבעת השופטים האחרים מוצאים את החשוד אשם.

- א. מהי ההסתברות שהחשוד יורשע?  
ב. בהינתן שהחשוד לא הורשע, מהי ההסתברות שרן לא מצא אותו אשם?  
ג. מהי שונות מספר השופטים שמוצאים את החשוד אשם?

---

### שאלה 2 (40 נקודות)

יהיו  $Z \sim P(2)$ ,  $Y \sim G(p)$ ,  $X \sim Bin\left(2, \frac{1}{2}\right)$ .

ידוע שאין תלות בין המשתנים  $X$  ו  $Y$ , אך לא ידוע אם יש תלות בין המשתנים  $Z$  ו  $Y$ .

- א. מהו  $P(X = 0)$ ?  
ב. מהו  $P(Y > 50)$ ? יש לתת ביטוי קצר ביותר.  
ג. מהו  $P(X + Y > 50)$ ? יש לתת ביטוי קצר ביותר.  
ד. האם יתכן ש  $Var(Z - Y) = 0$ ?
-

### שאלה 3 (40 נקודות)

חברה מבצעת הגרלה. בהגרלה משתתפים 100 אנשים. כל אחד מהמשתתפים משלם שקל אחד עבור השתתפותו בהגרלה. כל אחד מהמשתתפים בוחר מספר שלם בין 1 ל 100. אחר כך החברה מגרילה מספר שלם בין 1 ל 100 באופן אחיד ובלתי תלוי בבחירות של המשתתפים. אם יש משתתפים שבחרו במספר זה, אז משתתפים אלה מתחלקים בקופה של 100 שקלים שהצטברה מתשלומי המשתתפים. אם אף משתתף לא בחר במספר זה, אז 100 השקלים נשארים בידי החברה.

- א. נניח שכל משתתף בוחר באופן אחיד מספר בין 1 ל 100, ובאופן בלתי תלוי במשתתפים האחרים, מהי תוחלת מספר המשתתפים שיבחרו מספר שונה מכל אחד מהמשתתפים האחרים ?
- ב. נניח שכל משתתף בוחר באופן אחיד מספר בין 1 ל 100, ובאופן בלתי תלוי במשתתפים האחרים, מהי תוחלת הרווח של החברה ?
- ג. נמשיך להניח שהחברה מגרילה בסיכוי אחיד מספר שלם בין 1 ל 100 ושיש אי תלות בין הבחירות של המשתתפים השונים, אך כאן נניח שהמשתתפים בוחרים באופן אחיד רק מספרים שלמים בין 1 ל 50. מהי כעת תוחלת הרווח של החברה ?
- ד. כעת נניח כמו בסעיף ב' שכל משתתף בוחר בסיכוי שווה מספר שלם בין 1 ל 100, אך לא נניח שיש אי תלות בין הבחירות של המשתתפים השונים.
- האם קיום תלות בין המשתתפים השונים יכולה להגדיל את תוחלת הרווח של החברה ביחס למצב של אי תלות ?
- האם קיום תלות בין המשתתפים השונים יכולה להקטין את תוחלת הרווח של החברה ביחס למצב של אי תלות ?
-