

## בחינה במבוא להסתברות לסטטיסטיקאים

המרצה: ד"ר שלומי רובינשטיין

משך הבחינה: 3 שעות.  
מותר לכל תלמיד להשתמש בדף A4 אחד הכתוב משני צדדיו. אין להעביר דפים אלה בין תלמידים.  
מותר להשתמש במחשב כיס.  
בבחינה יש 3 שאלות. ענו על כל השאלות.  
משקל כל שאלה רשום בתחילתה. בכל שאלה יש חלוקה שווה של הנקודות בין הסעיפים.  
ניתן לצבור בסך הכל 110 נקודות. הצובר  $N$  נקודות יקבל ציון  $\min\{N, 100\}$ .  
אנא, השאירו את העמוד הראשון ( צד אחד של דף ) של מחברת הבחינה ריק.  
נמקו את תשובותיכם !

בהצלחה !

---

### שאלה 1 ( 40 נקודות )

אילה מוציאה ללא החזרה 4 כדורים מכד שבו 3 כדורים כחולים וכדור ירוק אחד.  
דפנה מוציאה עם החזרה 4 כדורים מכד שבו 3 כדורים כחולים וכדור ירוק אחד.  
אני רואה את סדרת הוצאות הכדורים של בדיוק אחת מבין אילה ודפנה. נניח שאני רואה את כל אחת מהסדרות בסיכוי שווה של חצי.  
יהיו  $X_i$  אינדיקטורים לקבלת כדור כחול בהוצאה ה-  $i$  של אילה.  
יהיו  $Y_i$  אינדיקטורים לקבלת כדור כחול בהוצאה ה-  $i$  של דפנה.  
יהיו  $Z_i$  אינדיקטורים לכך שאני רואה כדור כחול בהוצאה ה-  $i$ .  
כך אם אני רואה את סדרת ההוצאות של אילה, אז  $Z_i = X_i$  לכל  $i$  ואם אני רואה את סדרת ההוצאות של דפנה, אז  $Z_i = Y_i$  לכל  $i$ .

**א.** מהו  $P(X_1 = 1, X_2 = 1)$  ?

**ב.** מהו  $P(X_1 = 1, Z_1 = 1)$  ?

**ג.** מצאו  $E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$  בשתי דרכים.

**ד.** מהו  $P(Z_3 + Z_4 = 2 | Z_1 + Z_2 = 0)$  ? ( הכוונה היא להסתברות מותנה ).

---

**שאלה 2** (40 נקודות)

יהי  $X \sim \text{Bin}\left(3, \frac{1}{2}\right)$ .

- א.** חשבו  $E(X^2)$  על-ידי שימוש בנוסחא לחישוב שונות של משתנה.  
**ב.** חשבו  $E(X^2)$  בדרך אחרת, ללא שימוש בנוסחא לחישוב שונות של משתנה.  
**ג.** מהו  $P(X > E(X))$ ? מהו  $P(X \geq E(X))$ ?  
**ד.** מהו  $P(X^6 \geq E(X^6))$ ?
- 

**שאלה 3** (30 נקודות)

יהיו  $Y \sim U[1,3]$ ,  $X \sim U[1,4]$ .

- א.** בסעיף זה נניח ש  $X, Y$  הם בלתי תלויים.  
מהו  $P(Y > X)$ ?  
**ב.** גם בסעיף זה נניח ש  $X, Y$  הם בלתי תלויים.  
מהו  $P(X + Y = 6)$ ?  
**ג.** בסעיף זה אין הנחה של אי תלות.  
מהו ה-  $a$  המכסימלי שלגביו יכול להתקיים  $P(Y > X) = a$ ?  
( הכוונה היא שיש התפלגות משותפת של  $X$  ו  $Y$  כך ש  $P(Y > X) = a$ , אך לא קיימת התפלגות משותפת של  $X$  ו  $Y$  כך ש  $P(Y > X) > a$ .)
-